الثلاثاء: 2015/5/12

المحاضرة الثامنة (عملي):

- تمارين صفحة 116.

(23/118) إذا كان p عدداً أولياً أثبت أنّ:

$p \mid a^p + (p-1)!\,a$ ، $p \mid (p-1)!\,a^p + a$

الحل:

$p \mid (p-1)!\,a^p + a$

بما أنّ p أولي، حسب ويلسون:

$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

نضرب الطرفين بـ a^p

$a^p (p-1)! \equiv -a^p \pmod p$ (1)

حسب مبرهنة الصغرى:

$a^p \equiv a \pmod p$

$-a^p \equiv -a \pmod p$ (2)

نضرب الطرفين بـ (-1)

من (1) و (2)

$\Rightarrow a^p (p-1)! \equiv -a \pmod p$

$p \mid a^p (p-1)! + a$

$p \mid a^p + (p-1)!\,a$

حسب ويلسون:

$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

حسب مبرهنة $a^p \equiv a \pmod p \rightarrow a \equiv a^p \pmod p$

حسب خواص جداء التطابقات:

$a(p-1)! \equiv -a^p \pmod p \Rightarrow p \mid a(p-1)! + a^p$

(24/118) أوجد العدد الصحيح x حيث يكون:

$$3^2 \mid x \,,\quad 4^2 \mid x+1 \,,\quad 5^2 \mid x+2$$

الحل:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod{3^2} \\ x &\equiv -1 \pmod{4^2} \\ x &\equiv -2 \pmod{5^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (3^2, 4^2, 5^2) = 1$$

$3^2, 4^2, 5^2$ أولية مثنى مثنى

نحل النظامات حل بالقياس:

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 9 \times 16 \times 25 = 3600$$

$$M_1 = 16 \times 25 = 400 \Rightarrow 400 m_1' \equiv 1 \pmod{3^2} \Rightarrow m_1' \equiv -2 \pmod{3^2}$$

$$M_2 = 25 \times 9 = 225 \Rightarrow 225 m_2' \equiv 1 \pmod{4^2} \Rightarrow m_2' \equiv 1 \pmod{4^2}$$

$$M_3 = 9 \times 16 = 144 \Rightarrow 144 m_3' \equiv 1 \pmod{5^2} \Rightarrow m_3' \equiv 4 \pmod{5^2}$$

نعوض في الحل.

$$x \equiv (0)(400)(-2) + (-1)(225)(1) + (-2)(144)(4) \pmod{3600}$$

$$\equiv -225 - 1152 \pmod{3600}$$

$$\equiv -1377 \pmod{3600}$$

$$x \equiv 2223 \pmod{3600}$$

(19/117) أوجد أصغر عدد صحيح $a > 2$ حيث تتحقق العلاقات:

$$2 \mid a \,,\quad 3 \mid a+1 \,,\quad 4 \mid a+2 \,,\quad 5 \mid a+3 \,,\quad 6 \mid a+4$$

الحل:

$$a \equiv 0 \pmod 2$$

$$a \equiv -1 \pmod 3$$

$$a \equiv -2 \pmod 4$$

$$a \equiv -3 \pmod 5$$

$$a \equiv -4 \pmod 6$$

إن هذه الجملة تكافئ:

$a \equiv 2 \pmod 2$ (1)

$a \equiv 2 \pmod 3$ (2)

$a \equiv 2 \pmod 4$ (3)

$a \equiv 2 \pmod 5$ (4)

$a \equiv 2 \pmod 3$ (5) نكرر

$a \equiv 2 \pmod 2$ (6) الأخيرة

(1) + (3) + (6) $\Rightarrow$ $a \equiv 2 \pmod 4$

$a \equiv 2 \pmod 3$

$a \equiv 2 \pmod 5$

$\Rightarrow$ $a \equiv 2 \pmod{60}$

$a \equiv 62 \pmod{60}$

حسب خواص التطابقات

انتهت المحاضرة ...