المحاضرة ١٨

مبرهنة هيلبرت الأساسية: Hilbert's Basis theorem

إذا كانت R حلقة نوثرية فإن $R[x]$ حلقة نوثرية

الإثبات: ليكن $I \trianglelefteq R[x]$ مثالي اختياري

نميز حالتين

$I=\{0\}$ تم المطلوب (منتهي التوليد)

$I\neq\{0\}$ (سوف نعرف مثالي في R لكي نستخدم R نوثرية)

نعرف $I_m = \left\{\begin{array}{l} a\in R \;;\; 0\neq a,\ \exists f\in I \;; \\ \deg(f)=m,\ l(f)=a \end{array}\right\} \cup \{0\}$

مثالي في R

عندئذ

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

بما أن I نوثرية:

$$\exists n\in\mathbb{N} \;;\; \forall i\geq n : I_n = I_i$$

بما أن R نوثرية فإن أي مثالي فيها منتهي التوليد

$\forall i\in\{0,1,2,\dots,n\} : \exists a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{im_i}$ (متعلق بـ i)

بحيث يحقق

$$I_i = \langle a_{i1}, a_{i2}, \dots, \underbrace{a_{im_i}}_{\text{عدد المولدات للمثالي}} \rangle$$

$I_0 = \langle a_{01}, a_{02}, \dots a_{0m_0}\rangle$ مثلاً

$I_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \dots a_{1m_1}\rangle$

$\vdots$

$I_n = \langle a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nm_n}\rangle$

يقابلها

$f_{01}, f_{02}, \dots f_{0m_0}$

$f_{12} \dots f_{1m_1}, \dots f_{n1}$

$f_{n2}, \dots f_{nm_n}$

كل واحد منهم هو معامل رئيسي لحدودية حسب التعريف

$\sum_{i=0}^{n} m_i$ عددها

سنبرهن أن المثالي I مولد بالحدوديات

ومن أجل ذلك نبرهن أن

المثالي B المولد بهذه الحدوديات

$$B = \langle f_{01}, f_{02}, \dots f_{0m_0}, f_{11}, f_{12}, \dots f_{1m_1}$$
$$\dots, f_{n1}, f_{n2}, \dots f_{nm_n} \rangle = I$$

يساوي I

$$\forall i \in \{0,1,\dots,n\}, \quad J \in \{1,2,\dots,m_i\}$$

$$f_{iJ} \in I \Longrightarrow \boxed{B \subseteq I}$$

الاحتواء الثاني

لتكن $f = \sum_{i=0}^{s} a_i x^i \in I$

سنثبت بالاستقراء الرياضي أن f تنتمي لـ B (سنثبت بالاستقراء

على درجة f أي s):

$s = 0$ ، $f = c_0 \in I_0$ (I_0 مولد بـ $\langle a_{01}, a_{02}, \dots \rangle$

وبما أن

$$I_0 = \langle a_{01}, a_{02}, \dots a_{0m_0} \rangle ;$$
$$a_{0j} = f_{0j} \in B$$
$$J \in \{1,2,\dots,m_0\}$$

ومنه $c_0 \in B$ ، $f \in B$

الفرض الثاني للاستقراء: نفرض أن كل حدودية درجتها أقل من s تنتمي لـ B صحيحة ولنثبت أن أي حدودية درجتها s $\ni$ B

نفرض الآن: الحالة (1) $s \le n$

ومنه $I_s \subseteq I_n$

ومنه $l(f) = c_s \in I_s$

$$I_s = \langle a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sm_s} \rangle$$

$$\exists\, d_1, d_2, \dots, d_{m_s} \in R \ ; \ c_s = d_1 a_{s1} + d_2 a_{s2} + \dots + d_{m_s} a_{sm_s}$$

نعرف الحدودية

$$h = f - \left(\sum_{i=1}^{m_s} d_i a_{si}\right) x^s$$ بما أن n ...

$$= (c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \dots + c_0) - \left(\sum_{i=1}^{m_s} d_i a_{si} x^s\right)$$

وبالتالي $h = 0$ أو $\deg(h) < s$

$h = 0$ ⟸ المطلوب $h \in B$

$\deg(h) < s \Rightarrow h \in B$ حسب الفرض ** شرط (1)

$$f = \underbrace{h}_{\in B} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m_s} d_i a_{si}\right) x^s}_{\in B} \in B$$

الحالة الثانية: $s > n$

ومنه $I_n = I_s$

$$c_s \in I_n = \langle a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm_n} \rangle$$

$$\exists\, d_1, d_2, \dots, d_{m_n} \ ; \ c_s = \sum_{i=1}^{m_n} d_i a_{ni}$$

$$h = f - \left(\sum_{i=1}^{m_n} d_i a_{ni}\right) x^s$$

نكمل نفس الكلام * بالـ $n < s$

$h=0$ أو $\deg(h) < s$ تناقض *

$f \in B$ ومنه $I \subseteq B$

$I = B = \langle \quad \rangle$

أي مثالي في $R[x]$ منتهي التوليد وبالتالي $R[x]$

$R[x]$ حسب مبرهنة سابقة هي حلقة نوثرية

نتيجة: $\mathbb{R}$ نوثرية $\Leftarrow$ $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ نوثرية

مبرهنة: R آرتينية و $I \trianglelefteq R$ $\Leftarrow$ $R \setminus I$ آرتينية

مبرهنة: R حلقة تبديلية و $I \trianglelefteq R$. R/I آرتينية

و I آرتينية ← R آرتينية.

الاثبات: لتكن

 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$

سلسلة متناقصة (متتالية) من المثاليات في R

ومنه

$I_1+I/I \supseteq I_2+I/I \supseteq \dots$

في R/I بما أن R/I آرتينية

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \;;\; \forall i \geq n_1 : I_n + I/I = I_i + I/I$

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \,,\, \forall i \geq n_1 : I_n + I = I_i + I$

كما أن تكون السلسلة المتناقصة في الثاني في I

$I_1 \cap I \supset I_2 \cap I \supseteq \dots$

بما أن I آرتينية

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} ,\ \forall i \geq n_2$:

$I_{n_2} \cap I = I_i \cap I$

$n = \max\{n_1, n_2\}$: $\forall i \geq n$

$I_n + I = I_i + I$

$I_n \cap I = I_i \cap I$

من أجل: $i \geq n$

$I_n \supseteq I_i$ لأن

السلسلة متناقصة

نجد:

$$\begin{aligned} I_i &= I_i + (I_i \cap I) \\ &= I_i + (I_n \cap I) \\ &= I_n \cap (I_i + I) \\ &= I_n \cap (I_n + I) = I_n \end{aligned}$$

العودة من أجل مجموعة

$$I_i = I_i + (I_i \cap I) = I_i + (I_n \cap I)$$
$$= I_n \cap (I_i + I) = I_n \cap (I_n + I) = I_n$$

$I_i \subseteq I_n$ لأن

من أن السلسلة

منقطعة ضمن حلقة آرتينية

مبرهنة: لتكن R حلقة آرتينية وهي ID

⟸ R حقل

بما أن R منطقة تامة تكون حلقة تامة خالية من القواسم الصفرية

لكي تكون حقل يكفي أن نبرهن أن أي عنصر غير صفري قابل للعكس

لتكن $0 \neq a \in R$

عندئذ تكون السلسلة

$\langle a \rangle \supseteq \langle a^2 \rangle \supseteq \cdots$

سلسلة متناقصة من المثاليات في R

وكون R آرتينية هذه السلسلة تتقطع

$\exists n \in \mathbb{N} \; ; \; \langle a^n \rangle = \langle a^i \rangle \quad \forall i \geq n$

ومنه $a^n \in \langle a^n \rangle = \langle a^{n+1} \rangle$

$\exists b \in R : a^{n+1} \cdot b = a^n \Rightarrow \cancel{a^n(ab-1)}$

$a^{n+1} b - a^n = 0 \Rightarrow a^n(ab-1) = 0$

$\Rightarrow a^n = 0 \vee ab - 1 = 0$

$\overset{a \neq 0}{\Rightarrow} ab - 1 = 0 \Rightarrow a \cdot b = 1$

$\Rightarrow a \in U(R)$

ومنه R حقل

لتكن R حلقة تبديلية واحدية . إذا كانت R آرتينية فإن كل مثالي أولي في R هو أعظمي في R

أي $(\mathcal{Y}\text{-}Spec(R) = Spec(R))$

علماً أن R حلقة تبديلية واحدية فإن كل مثالي أعظمي في R هو مثالي أولي أي

$\mathcal{Y}\text{-}Spec(R) \subseteq Spec(R)$

ليكن $\boxed{P \in Spec(R)}$ $\Leftarrow$ R/P هي ID

وحسب المبرهنة السابقة R/P آرتينية

$\Leftarrow$ R/P حقل $\Leftarrow$ ~~Resp~~

$\boxed{P \in \mathcal{M}-Spec(R)}$

انتهى