الأربعاء: 2015/4/29

المحاضرة الثانية عشرة:

تتمة حل المثال:

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$2z(z+1)w'' + 3(z+1)w' - w = 0$$

في جوار الصفر.

تتمة الحل: نتابع:

بما أنّ $z=0$ نقطة شاذة منتظمة نبحث عن حل من الشكل:

$$\begin{array}{c|l} -1 & w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad ; \quad c \neq 0 \\ 3(z+1) & w' = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda) z^{k+\lambda-1} \\ 2z(z+1) & w'' = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+\lambda-2} \quad + \\ \hline & \end{array}$$

$$2z(z+1)\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (k+\lambda)(k+\lambda-1) z^{k+\lambda-2} + 3.(z+1)$$

$$.\sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda) c_k z^{k+\lambda-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نفك الأقواس:

$$(2z^2+2z)\sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1) c_k z^{k+\lambda-2} + (3z+3)\sum_{k=0}^{+\infty} (k+\lambda).$$

$$c_k z^{k+\lambda-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

$$2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k+\lambda-1}$$
$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+\lambda)c_k z^{k+\lambda-1}$$
$$- \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda} = 0$$

نقسم الطرفين على z^{λ}

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k-1}$$
$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+\lambda)c_k z^{k} + \sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+\lambda)c_k z^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k} = 0$$

أصغر أس موجود عندما $k=0$ فنحصل على المعادلة الدليلية عن طريق المطابقة

أصغر الحدود التي فيها z^{-1} فقط هي التي تعطي المعادلة الدليلية

بالمطابقة :

$$k=0 \Rightarrow z^{-1} : \quad 2(\lambda)(\lambda-1)c_0 + 3\lambda c_0 = 0$$

$$[2\lambda(\lambda-1)+3\lambda]c_0 = 0$$

ولكن $c_0 \neq 0$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda-1)+3\lambda = 0$$
$$2\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda = 0$$
$$2\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(2\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}^+$ الفرق بين الجذرين ليس عدداً صحيحاً ونحن الآن أمام الحالة الأولى.

ملاحظة:

لو ضربنا طرفي المعادلة الأصلية بـ z فستنتج المعادلة الدليلية سنحصل عليها من عملية المطابقة مع z^0 وليس z^1 وستتابع عملية المطابقة مع z^k وليس z^{k-1}.

لنتابع عملية المطابقة: حيث أن الحدين الثاني والرابع يبدأان من $k=1$ لأنه من أجل $k=0$ أعطانا المعادلة الدليلية

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^k + \sum_{k=1}^{+\infty} 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k z^{k-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+\lambda)c_k z^k + \sum_{k=1}^{+\infty} 3(k+\lambda)c_k z^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0$$

بالمطابقة:

$$z^{k-1}: 2(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)c_{k-1} + 2(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k$$
$$+3(k+\lambda-1)c_{k-1} + 3(k+\lambda)c_k - c_{k-1} = 0$$

$$[2(k+\lambda)(k+\lambda-1)+3(k+\lambda)]c_k + [2(k+\lambda-1).$$

$$.(k+\lambda-2)+3(k+\lambda-1)-1]c_{k-1} = 0$$

$$[(k+\lambda)(2k+2\lambda-2+3)]c_k + [(k+\lambda-1).(2k+2\lambda-4+3)$$

$$-1]c_{k-1} = 0$$

$$[(k+\lambda)(2k+2\lambda+1)]\,c_k = -[(k+\lambda-1)(2k+2\lambda-1)-1]\,c_{k-1} \quad ; \forall k \geq 1$$

$$c_k = -\frac{(k+\lambda-1)(2k+2\lambda-1)-1}{(k+\lambda)(2k+2\lambda+1)}\,c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1 \qquad (*)$$

for; $\lambda_1 = 0 \Rightarrow c_k = -\dfrac{(k-1)(2k-1)-1}{k(2k+1)}\,c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$

$$k=1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}c_0$$

$$k=2 \Rightarrow c_2 = -\frac{(1)(3)-1}{(2)(5)}\,c_1$$

$$= -\frac{2}{10}c_1 = -\frac{1}{5}c_1$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}c_0\right) = -\frac{1}{15}c_0$$

$$k=3 \Rightarrow c_3 = -\frac{(2)(5)-1}{3(7)}\,c_2$$

$$c_3 = -\frac{3}{7}c_2$$

$$c_1 = \frac{1}{3}c_0$$

$$c_2 = -\frac{1}{5}c_1$$

$$c_3 = -\frac{3}{7}c_2$$

/ /

$$c_4 = -\frac{5}{9}\, c_3$$

- - - - - - - - -

$$c_k = \frac{-(2k-3)}{2k+1}\, c_{k-1} \quad ; \; k \geq 1$$

مصطلحا من C_k لدينا:

$$c_k = \frac{-(k-1)(2k-1)-1}{k(2k+1)}\, c_{k-1}$$

$$= \frac{-(2k^2-k-2k+1-1)}{k(2k+1)}\, c_{k-1} = \frac{-(2k^2-3k)}{k(2k+1)}\, c_{k-1}$$

$$= -\frac{\cancel{k}(2k-3)}{\cancel{k}(2k+1)}\, c_{k-1} = \frac{-(2k-3)}{2k+1}\, c_{k-1}$$

نضرب العلاقات جميعاً طرفاً لطرف فنجد:

$$\cancel{c_1} \cdot \cancel{c_2} \cdot \cancel{c_3} \cdots \cancel{c_{k-1}}\, c_k = \frac{1}{3} c_0 \cdot \left(-\frac{1}{5}\cancel{c_1}\right)\left(-\frac{3}{7}\cancel{c_2}\right) \cdots -\frac{(2k-3)}{2k+1}\cancel{c_{k-1}}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{(1)(-1)(-3)(-5) \cdots -(2k-3)\; c_0}{(3)(5)(7)(9) \cdots (2k-3)(2k-1)(2k+1)}$$

نختار $c_0 = 1$ بما يتناسب مع المسألة المطروحة:

$$c_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)} \quad ; \; k \geq 1$$

نعوض:

$$w_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda_1} = z^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \quad ; \; \lambda_1 = 0$$

$$\boxed{w_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)(2k+1)}\, z^k}$$

وهو الحل الأول للمعادلة التفاضلية :

نعوض في (*)

$$\text{for; } \lambda_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k c_k = -(k-2) c_{k-1} \quad ; k \geq 1$$

$$c_k = \frac{-(k-2)}{k} c_{k-1} \quad ; \quad k \geq 1$$

$$k=1 \Rightarrow c_1 = c_0$$

$$k=2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$k=3 \Rightarrow c_3 = 0$$

الحدود المتبقية جميعهم أصفار

نعوض في صيغة الحل

$$w_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda_2}$$

ننشر المتسلسلة لأن جميع الحدود أصفار

$$w_2 = z^{-\frac{1}{2}} [c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots]$$

$$= z^{-\frac{1}{2}} [c_0 + c_0 z]$$

$$w_2 = z^{-\frac{1}{2}} [1 + z] \quad ; \quad c_0 = 1$$

$$\boxed{w_2 = \frac{1}{\sqrt{z}} (1 + z)}$$

وهو الحل الثاني للمعادلة التفاضلية.

ومنه

الحلان مستقلان خطياً (محدد رونسكي $\neq 0$) والحل العام للمعادلة التفاضلية

المبرهنة

$$w = A_1 w_1 + A_2 w_2$$

حيث A_1, A_2 ثابتات كيفيات

وهو المطلوب

وظيفة :

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$z w'' + (1 + 4z^2) w' + 4z (1 + z^2) w = 0$$

في جوار الصفر.

انتهت المحاضرة ...