الثلاثاء: 21/4/2015

المحاضرة السادسة (عملي):

- تمارين صفحة 116 -

$\frac{16}{116}$) أوجد باقي قسمة المجموع $1^5+2^5+3^5+\dots+99^5+100^5$ على العدد 4.

الحل:

إذا كان a عدد زوجي فإن $a=2n$

$$a^5 = 2^2 2^3 n^5 \equiv 0 \pmod 4$$

وإذا كان a عدد فردي، مثلاً:

$$1^5 \equiv 1 \pmod 4$$

$$3^5 \equiv 243 \equiv 3 \pmod 4$$

$$5^5 \equiv 3125 \equiv 5 \pmod 4$$

إذا كان a عدد فردي فإن:

$$a^2 = 8M+1$$
$$a^2 = 4(2M)+1$$
$$a^2 \equiv 1 \pmod 4$$
$$a^4 \equiv 1 \pmod 4$$
$$a^5 \equiv a \pmod 4$$

$$1^5+2^5+3^5+\dots+99^5+100^5 \equiv 1^5+3^5+\dots+99^5 \pmod 4$$

$$\equiv 1+3+\dots+99 \pmod 4$$

$$1+3+5+\cdots+99$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$1+3+5+\cdots+(2(50)-1)=50^2$$

$$1^5+2^5+\cdots+99^5+100^5\equiv 50^2\equiv 2500\equiv 0 \pmod 4$$

ومنه هذا المجموع من مضاعفات العدد 4.

($\frac{14}{117}$ أوجد الكسور البسيطة المستمرة من أجل كل من الكسور التالية:

$$\frac{-125}{198}\ ,\quad \frac{-503}{187}\ ,\quad \frac{118}{303}\ ,\quad \frac{119}{32}$$

الحل:

$\frac{-125}{198}$ نلاحظ أنَّ $198>125$

$$\frac{-125}{198}=\frac{-198+73}{198}$$

$$=-1+\frac{73}{198}$$

$$=-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{52}{73}}$$

$$=-1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{21}{52}}}$$

$$= -1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{10}}}}}$$

$$\frac{-125}{198} = \langle -1, 2, 1, 2, 2, 10 \rangle$$

$$\frac{-503}{187} = \frac{-561 + 58}{187}$$

$$= -3 + \frac{58}{187}$$

$$= \langle -3, 3, 4, 2, 6 \rangle$$

$$\frac{119}{32} = \langle 3, 1, 2, 1, 1, 4 \rangle$$

$$\frac{118}{303} = \langle 0, 2, 1, 1, 3, 5, 3 \rangle$$

$\left(\frac{15}{117}\right)$ أوجد الكسر المقابل ل: $\langle 3, 1, 1, 4, 1, 3 \rangle$

الحل:

لدينا: $\langle 3, 1, 1, 4, 1, 3 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle$

$p_1 = a_1 \qquad q_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1} = 3$

$$p_2 = a_2 a_1 + 1 \qquad q_2 = a_2 \Rightarrow c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 a_1 + 1}{a_2} = \frac{3+1}{1} = 4$$

$$c_1 = \frac{3}{1} \quad , \quad c_2 = \frac{4}{1}$$

$$c_3 = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{7}{2}$$

$$c_4 = \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{32}{9}$$

$$c_5 = \frac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} = \frac{1 \times 32 + 7}{1 \times 9 + 2} = \frac{39}{11}$$

$$c_6 = \frac{a_6 p_5 + p_4}{a_6 q_5 + q_4} \quad \frac{3 \times 39 + 32}{3 \times 11 + 9} = \frac{149}{42}$$

$$149x \equiv 1 \pmod{42}$$

$$\frac{p_5}{q_5} \quad , \quad \frac{p_6}{q_6}$$

نكتب الكسر على شكل معادلة:

$$p_6 q_5 - p_5 q_6 = (-1)^6 = 1$$

$$149 \underset{x}{q_5} - 42 \underset{y}{p_5} = 1$$

$\frac{16}{11/6}$) أوجد الحل الكامل لكل من :

$$187x \equiv 2 \pmod{503}$$

الحل :

حسب معادلة ديوفانتس

$$187x - 503y = 2$$

$$187 = 17 \times 11$$

ومنه $(187, 503) = 1$

حسب ديوفانتس :

$$503 = 187 \times 2 + 129$$
$$187 = 129 \times 1 + 58$$
$$129 = 58 \times 2 + 13$$
$$58 = 13 \times 4 + 6$$
$$13 = 6 \times 2 + 1 \Rightarrow d = 1$$
$$6 = 3 \times 2 + 0$$

$$1 = 13 - 2 \times 6$$
$$= 13 - 2 \times (58 - 4 \times 13)$$
$$= -2 \times 58 + 9 \times (129 - 58 \times 2)$$
$$= 9 \times 129 - 20 \times 58$$
$$= 9 \times 129 - 20 \times (187 - 129 \times 1)$$
$$= -20 \times 187 + 29 \times 129$$
$$= -20 \times 187 + 29(503 - 2 \times 187)$$

لدينا :

$$1 = 29 \times 503 - 78 \times 187$$

نضرب الطرفين بـ (2)

$2 = 58 \times 503 - 156 \times 187$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -156 \\ y_0 = -58 \end{cases}$$

$x = x_0 + bt = -156 + 503t$

$y = y_0 - at = -58 - 187t \quad ; \quad t \in Z$

$x = -156 \pmod{503} \equiv 347 \pmod{503}$

نضيف 503 يصبح موجب

طريقة ثانية باستخدام الكسور :

$$\frac{503}{187} = 2 + \frac{129}{187}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}}}}$$

$$\frac{503}{187} = \langle 2, 1, 2, 4, 2, 6 \rangle$$

$P_1 = a_1 = 2 \qquad q_1 = 1$

$P_2 = a_2 a_1 + 1 = 3 \qquad q_2 = a_2 = 1$

$C_1 = \frac{2}{1}$, $C_2 = \frac{3}{1}$

$C_3 = \frac{8}{3}$, $C_4 = \frac{35}{13}$

$C_5 = \frac{78}{29}$, $C_6 = \frac{503}{187}$

نعوض في المعادلة :

$P_6 q_5 - P_5 q_6 = (-1)^6 = 1$

$503 \times 29 - 78 \times 187 = 1$

نضرب الطرفين بـ (2)

$503 \times 58 - 156 \times 187 = 2$

$x \equiv -156 \pmod{503}$

$\Rightarrow x \equiv 347 \pmod{503}$

انتهت المحاضرة...