2015/4/23 المحاضرة 3

< طبولوجيا $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}$ >

في $\mathbb{R}$:

1) النقطة الداخلية:

x_0 نقطة داخلية للمجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\exists \;]a,b[\; : \; x_0 \in \;]a,b[\; \subset A$$

((إذا وجد جوار يحوي النقطة ولتكن x_0 محتوى في المجموعة A))

يمكن كتابتها بشكل آخر:

$$\exists r > 0 \; : \; x_0 \in \;]x_0 - r , x_0 + r[\; \subset A$$

$r > |x - x_0|$ البعد (المسافة)

ونرمز للنقاط الداخلية A^o

إذا كانت A لمجموعة خالية ⟸ لا يوجد نقاط داخلية

إن المجموعة $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، ... لا يوجد منها نقاط داخلية لأنها تشكل خال

---

2) المجموعة المفتوحة $A \subseteq \mathbb{R}$: نقول عن A أنها مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية $A = A^o$

- $\forall x \in A \, , \, \exists r > 0 \, : \,]x - r , x + r[\; \subset A$

- $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ((المجموعة المفتوحة يمكن التعبير عنها باجتماع مجموعات مفتوحة))

(تراكم أو نهاية)

٣- x_0 نقطة تجمع لـ $A \subseteq R$

$$\forall r>0 :]x_0-r , x_0+r[\cap (A\setminus\{x_0\}) \neq \emptyset$$

ونرمز لها بـ A'

$$A' =]2,3[' = [2,3]$$

النقاط الداخلية هي نقاط تجمع بالإضافة للأطراف

• بالنسبة للمتتاليات إذا كانت المتتالية متقاربة فتكون النهاية هي نقطة تجمع

• بالنسبة للمجموعات:

$$N' = \emptyset \ , \ Z' = \emptyset \ , \ \underbrace{Q' = R \ , \ R' = R}$$

لأن Q عبارة عن مجموعة كثيفة فمثلاً إذا أخذنا نقطة ولتكن x_0 وهذه النقطة من R لما أقوم بأخذ

أي مجال متقاطع مع Q مع فرق النقطة x_0 لا يعطيني عدد لا نهائي مثلاً المجال هو $]x_0-r , x_0+r[$

(أي قيمة في R تصلح أن تكون نقطة تجمع في Q

٤- المجموعة المغلقة $A \subseteq R$: لها تعريفين:

1) إن يكون متممتها مفتوحة (A^c مفتوحة)

2) إذا كانت تحوي نقاط تجمع لها عندئذ نقول $A' \subset A$

((إذا كانت لا تحوي نقاط تجمعها عندئذ ليست مغلقة))

R و Q مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد

إذن R مجموعة مغلقة

Q ليست مغلقة

إن $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n]$ اجتماع المغلقات لو كان منتهي جزء مغلق

- $\{1, 2, 3\}$ مجموعة منتهية هي مجموعة مغلقة.

- $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$N^c = \bigcup_{n=0}^{\infty}]n, n+1[\cup]-\infty, 0[\xrightarrow[\text{نحول}]{\text{أو}}]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3[\cup]-\infty,0[$$

مثال: $]1,2[$ المتمم $\leftarrow$ $]-\infty,1] \cup [2, +\infty[$

$$N^c = R \setminus N$$

المجموعة المفتوحة هي لو كانت غير منتهية تبقى منتهية

في R^2: تعريف: ندعوا قرصاً مفتوحاً في المستوى $R \times R$ النقطة الواقعة داخل الدائرة (دون محيطها) ونرمز لها بـ $D_p(r)$

حيث: P هو مركزه (x_0, y_0)
r نصف قطر

$$D_p(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

أو نكتب

$$D_p(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

هذا بعد

١- النقطة الداخلية

لتكن P نقطة داخلية لـ $\mathbb{R}^2 \supseteq A$: يوجد قرص مفتوح يحوي النقطة ومحتوى في A

$$\exists r>0 : P \in D_p(r) \subset A$$

$$d(u,P) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$$

٢- المجموعة المفتوحة $\mathbb{R}^2 \supseteq A$

نقول عن المجموعة إنها مفتوحة : إذا كانت جميع نقاطها داخلية : $A = A^o$

$$\forall P \in A \;,\; \exists r>0 \;:\; P \in D_p(r) \subset A$$

٣- نقطة التجمع :

P نقطة تجمع لـ $\mathbb{R}^2 \supseteq A$ من أجل أي جوار لـ P تقاطعه مع A يساوي $\emptyset$

$$\forall r>0 \;:\; D_p(r) \cap (A \setminus P) \neq \emptyset$$

إذاً A' نقاط تجمع.

$$D_p(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

$$D'_{p(x,y)}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$$

باضافة النقاط المحيطة من نقاط تجمع

٤- المجموعة المغلقة $A \subseteq \mathbb{R}^2$

1) إذا كانت متممتها مفتوحة (A^c مفتوحة)

أو 2) إذا كانت $A' \subset A$

الأقراص التي تحوي محيطها هي مجموعات مغلقة

$\mathbb{R}^2 \setminus D_p(r) \Leftarrow$ هي مجموعة مغلقة
مجموعة مفتوحة

$\mathbb{R}^2 \setminus D'_p(r) \Leftarrow$ مجموعة مفتوحة

في $\mathbb{R}^3$: ندعو كرة مفتوحة في الفراغ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
هو الجزء الواقع داخل الكرة (دون سطحها)

ونرمز لها $B_p(r)$

حيث $P(x_0, y_0, z_0)$

١- P نقطة داخلية لـ $A \subseteq \mathbb{R}^3$. نرمز لها بـ A^0

$\exists r > 0 \quad : P \in B_p(r) \subset A$
توجد كرة

٢- المجموعة المفتوحة $A \subseteq \mathbb{R}^3$:

1) $A = A^0$

2) $\forall P \in A \quad , \exists r > 0 \quad , z \in B_p(r) \subset A$

٣- P نقطة تجمع لـ $A \subseteq \mathbb{R}^3$

A' نقاط تجمع : $\forall r > 0 \quad : B_p(r) \cap (A \setminus P) \neq \emptyset$

$$B_{P(x_0,y_0,z_0)}\, r = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2\}$$

نقاط الجمع كل النقاط الداخلية بالإضافة إلى سطح الكرة

$$B'_p(r) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le r^2\}$$

٤- المجموعة المغلقة $A \subseteq \mathbb{R}^3 \iff$

1) A^c مفتوحة

أو

2) $A' \subset A$

$(\mathbb{R}^3 \setminus B_p(r))$ مغلقة

$(\mathbb{R}^3 \setminus B'_p(r))$ مفتوحة
