المحاضرة الخامسة

مسألة[1]: إذا كان $n,m\in\mathbb{N}$ يحققان $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$ فإنَّ $\sqrt{7}-\frac{m}{n}\geq\frac{1}{m\cdot n}$

الحل:

$$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0\Rightarrow\sqrt{7}>\frac{m}{n}\Rightarrow\sqrt{7}n>m\Rightarrow 7n^2>m^2$$

نعلم أنه من أجل أي عدد صحيح موجب t يكون

$$\forall\, x\in\mathbb{Z}\ :\ x\equiv r(mod\ t)\ ;\ r\in\{0,1,\dots,t-1\}$$
$$\Rightarrow m\equiv r(mod\ 7)\ ;\ r\in\{0,1,\dots,6\}$$

وبالتالي $m^2\equiv r(mod\ 7)$ بحيث يكون $r\in\{0,1,2,4\}$ ولنبيّن ذلك

$$m=0\Rightarrow m^2=0\equiv 0(mod\ 7)\quad,\quad m=1\Rightarrow m^2=1\equiv 1(mod\ 7)$$
$$m=2\Rightarrow m^2=4\equiv 4(mod\ 7)\quad,\quad m=4\Rightarrow m^2=16\equiv 2(mod\ 7)$$
$$m=5\Rightarrow m^2=25\equiv 4(mod\ 7)\quad,\quad m=6\Rightarrow m^2=36\equiv 1(mod\ 7)$$
$$m=7\Rightarrow m^2=49\equiv 4(mod\ 7)\quad,\dots\dots\dots\dots$$

أي $m^2=7q+r$ بحيث $r\in\{0,1,2,4\}$ ومنه

$$7n^2>m^2\Rightarrow 7n^2-m^2>0\Rightarrow 7n^2-(7q+r)>0$$
$$\Rightarrow 7n^2-7q-r>0\Rightarrow 7(n^2-q)-r>0$$

إنَّ $n^2-q\geq 1$ لأنَّ

$$7n^2-7q-r>0\Rightarrow 7(n^2-q)>r\quad;\quad r\in\{0,1,2,4\}$$

بأخذ r أصغر ما يمكن أي $r=0$ يكون $7(n^2-q)>0$ ومنه $n^2-q>0$ وكونه عدد صحيح فإنَّ $n^2-q\geq 1$ وعليه يمكننا أن نكتب

$$7(n^2-q)-r\geq 7\times 1-r\geq 7-4=3\Rightarrow 7n^2-m^2\geq 3\Rightarrow 7n^2\geq m^2+3$$
$$m^2+3=m^2+2+1\geq m^2+2+\frac{1}{m^2}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2$$
$$\Rightarrow 7n^2\geq m^2+3\geq\left(m+\frac{1}{m}\right)^2\Rightarrow\sqrt{7}n\geq m+\frac{1}{m}\Rightarrow\sqrt{7}\geq\frac{m}{n}+\frac{1}{m\cdot n}$$
$$\Rightarrow\sqrt{7}-\frac{m}{n}\geq\frac{1}{m\cdot n}$$

مسألة[2]:

ليكن $n\in\mathbb{N}$ برهن أنه إذا كان $2\sqrt{28n^2+1}+2$ عدداً صحيحياً فإنه سيكون مربعاً كاملاً.

الحل:

$$x=2\sqrt{28n^2+1}+2-2=2\sqrt{28n^2+1}\in\mathbb{Z}$$

وكون $x\in\mathbb{Z}$ فإنَّ الجذر فيه عدد صحيح أي يمكننا القول إنَّ $d=\sqrt{28n^2+1}\in\mathbb{Z}$ وبالتالي

$$d^2=28n^2+1$$

d^2 فردي ومنه يكون d فردي أي يُكتب على النحو التالي $m\in\mathbb{N}\ ;\ d=2m+1$

$$d=\sqrt{28n^2+1}=2m+1\Longrightarrow 28n^2+1=(2m+1)^2=4m^2+4m+1$$
$$28n^2=4m^2+4m=4m(m+1)\Longrightarrow 7n^2=m(m+1)$$

يوجد عددين صحيحين $s,t\in\mathbb{Z}$ بحيث $n=s\cdot t$، وإنَّ 7 عدد أولي يقسم $m(m+1)$ وحسب مبرهنة إقليدس يكون 7 يقسم m أو 7 يقسم $m+1$

وبالتالي يكون لدينا $7(st)^2=m(m+1)$ ونميز الحالتين:

$$1)\ 7s^2=m\ ,\ t^2=m+1 \qquad ,\qquad 2)\ 7s^2=m+1\ ,\ t^2=m$$

الحالة الأولى: $7s^2=m\ ,\ t^2=m+1$

$$2\sqrt{28n^2+1}+2=2\sqrt{(2m+1)^2}+2=2(2m+1)+2=4m+2+2$$
$$2\sqrt{28n^2+1}+2=4m+4=4(m+1)=4t^2=(2t)^2=c^2\ ;\ c\in\mathbb{Z}$$

ومنه أمكننا كتابة $2\sqrt{28n^2+1}+2$ على شكل مربع لعدد صحيح.

الحالة الثانية: $7s^2=m+1\ ,\ t^2=m$

$$1=m+1-m=7s^2-t^2\Longrightarrow 7s^2=1+t^2$$

ومنه يكون $1+t^2\equiv 0(mod\ 7)$ وبالتالي $t^2\equiv 6(mod\ 7)$ وهذا غير ممكن لأنه من أجل أي عدد صحيح x سيكون $x^2\equiv r(mod\ 7)$ بحيث $r\in\{0,1,2,4\}$. ومنه هذه الحالة غير ممكنة.

الأعداد من الشكل $\underbrace{11\cdots\cdots 11}_{n\text{ مرة}}$ **:** وهذه الأعداد يمكن التعبير عنها على النجو التالي

$$\underbrace{11\ldots 1}_{n\text{ مرة}}=1+10+\cdots+10^{n-1}$$

نعلم أنَّ $\sum_{i=0}^{n}x^i=1+x+x^2+\cdots++x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x+1}$ ومنه من أجل $x=10$ يكون

$$\sum_{i=0}^{n}10^i=1+10+100+\cdots\cdots+10^n=\frac{10^{n+1}-1}{10-1}=\frac{10^{n+1}-1}{9}$$

وبالتالي

$$\underbrace{11\ldots 1}_{n\text{ مرة}}=1+10+\cdots+10^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}10^i=1+10+\cdots\cdots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}$$

$$\boxed{\underbrace{11\ldots 1}_{n\text{ مرة}}=\frac{10^n-1}{9}}$$

في العدد $\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } n}$ في حال كان $n=\alpha k$ عندئذٍ:

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } n}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } (\alpha k)}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } \alpha}\times\overbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{\text{مرة } (\alpha-1)}100\cdots01\cdots\cdots100\cdots01}^{\text{مرة } (k-1)}$$

أمثلة:

$$1)\ \underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 5}=11111=\frac{10^5-1}{9}=\frac{99999}{9}=11111$$

2) $if\ n=6\,,n=2\times3\ ;\ \alpha=2\,,k=3$:

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 6}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } (2\times3)}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 2}\times\overbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{\text{مرة } (2-1)}100\cdots01\cdots\cdots100\cdots01}^{\text{مرة } (3-1)}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 6}=11\times10101$$

أو يمكن أن ننظر إليها من وجهة نظر ثانية $6=3\times2$ أي نضع $\alpha=3$ و $k=2$

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 6}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } (3\times2)}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 3}\times\overbrace{1\underbrace{00\cdots0}_{\text{مرة } (3-1)}100\cdots01\cdots\cdots100\cdots01}^{\text{مرة } (2-1)}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 6}=111\times1001$$

مسألة[1]: إذا كان $\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } k}$ أولي فإنَّ k سيكون أولي، وبين أنَّ العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

مسألة[2]: برهن أنَّ $\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } n}$ يقبل القسمة على 41 إذا وفقط إذا كان n يقبل القسمة على 5.

مسألة[3]: أثبت أنَّ $\underbrace{11\ldots1}_{\text{مرة } 2n}=\underbrace{22\ldots2}_{\text{مرة } n}+\underbrace{(33\ldots3)}_{\text{مرة } n}^2$.

انتهت المحاضرة ،،، عامر أبوبكر