26/4/2015

المحاضرة / 3 / عملي

أثبت أن (X,τ) حيث X مجموعة غير منتهية و

$\tau=\{\phi\}\cup\{\theta\subseteq X :$ منتهية $\theta^c\}$

ليس فضاءً مترياً

الحل:

نفرض جدلاً أنه أمكن تعريف دالة مسافة d على X عندئذ

$$\forall x,y\in X : x\neq y \Rightarrow \exists r>0 : N(x,r)\cap N(y,r)=\phi$$

وهذه خاصية هاوسدورف

الاثبات:

$$x\neq y \Rightarrow d(x,y)>0$$

ليكن $\varepsilon=\frac{d(x,y)}{2}>0$

نفرض جدلاً أن

$$N(x,\varepsilon)\cap N(y,\varepsilon)\neq\phi$$

$$\exists z\in X : z\in N(x,\varepsilon) \wedge z\in N(y,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow d(z,x)<\varepsilon \wedge d(z,y)<\varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x,y)\le d(z,x)+d(z,y)<2\varepsilon= d(x,y)$$

$$\Rightarrow d(x,y)<d(x,y)$$

وهذا تناقض والفرض الذي هو عدم التقاطع خاطئ

بما أن $x\neq y$ نختار $N(x,\varepsilon)$ ، $N(y,\varepsilon)$

لدينا $N(x,\varepsilon)\cap N(y,\varepsilon)=\phi$

$U=X\setminus N(x,\varepsilon)$ ، $V=X\setminus N(y,\varepsilon)$

منتهية

$$\Rightarrow U \cup V = X \setminus (\underbrace{N(x,\varepsilon)\cap N(y,\varepsilon)}_{=\phi})$$

$$= X$$

تناقض

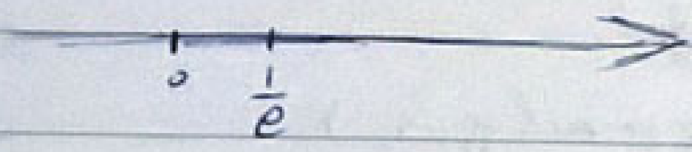
إذاً ليس فضاء متري

---

② $X = \mathbb{R}$

$$\tau = \{\phi , \mathbb{R}\} \cup \{]q,+\infty[\ , q \in \mathbb{Q} \}$$

اثبت ان τ ليست طبولوجيا على X



الحل : نعلم ان

$e \notin \mathbb{Q}$

وان

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

نعتبر $r_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

متزايدة إذاً $r_n \to e$

$\Leftarrow$ $q_n = \frac{1}{r_n} \to \frac{1}{e}$ متتالية متناقصة

علماً انا نبين ان

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}]q_n , +\infty[\overset{?}{=}]\underset{\notin \mathbb{Q}}{\frac{1}{e}} , +\infty[\notin \tau$$

$$]a_n, +\infty[\subseteq]\tfrac{1}{e}, +\infty[$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, +\infty[\subseteq]\tfrac{1}{e}, +\infty[$$

بإعطاء $x \in]\frac{1}{e}, +\infty[$ فيوجد n_0 مناسب كبير بكفاية

كافي فيها $a_{n_0} < x \Rightarrow x \in]a_{n_0}, +\infty[$

$\Leftarrow$ الاحتواء المعاكس

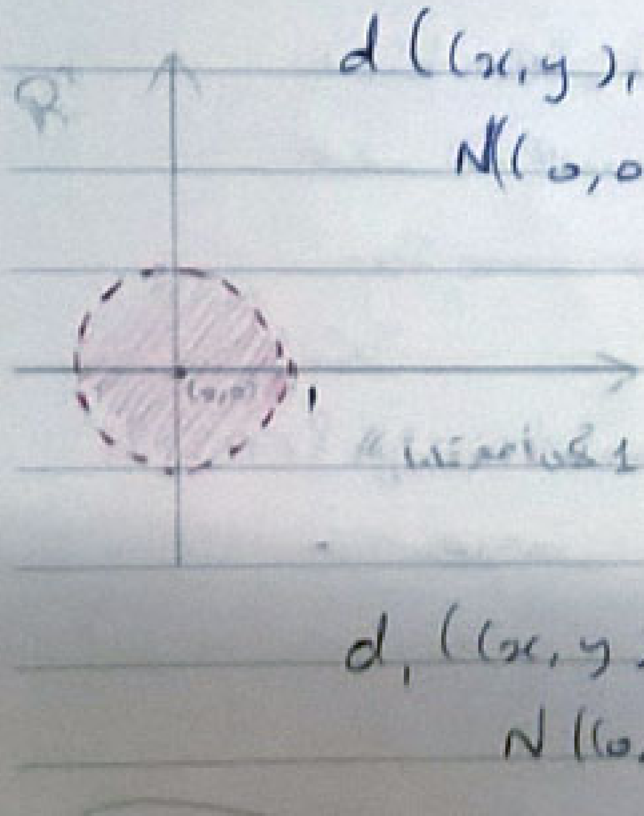
وهذا هو المطلوب

ارسم الكرة $(N((0,0),1))$ في

(R^2, d) , (R^2, d_1) , (R^2, d_∞)

أولاً: ★ في (R^2, d)

$$d((x,y),(x_1,y_1)) = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$



$$N((0,0),1) = \{(x,y)\in R^2 : d((x,y),(0,0))<1\}$$
$$= \{(x,y)\in R^2 : \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<1\}$$
$$= \{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\}$$

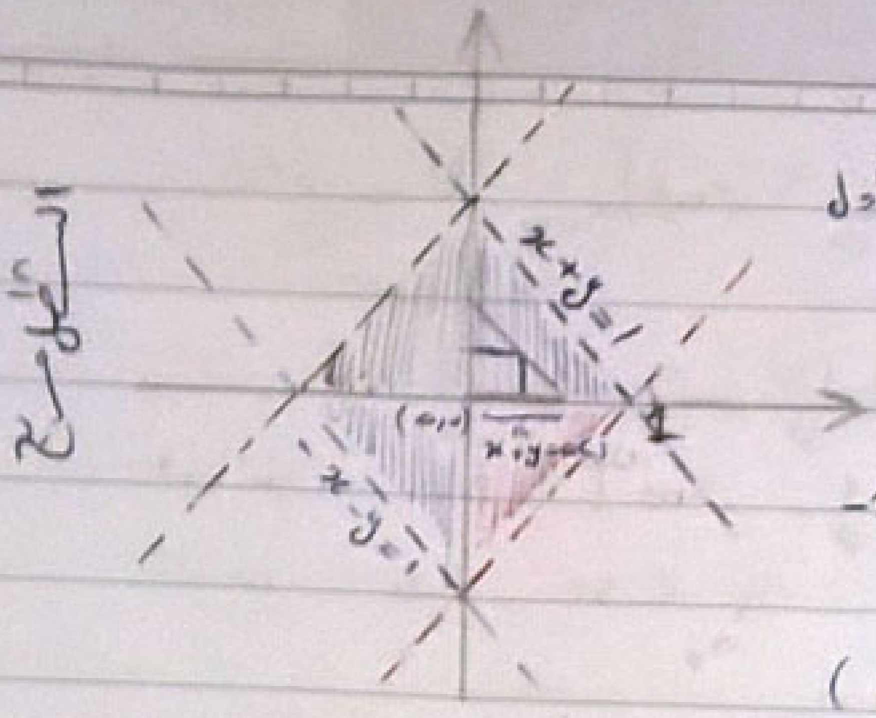
[illegible]

★ في (R^2, d_1)

$$d_1((x,y),(x_1,y_1)) = |x-x_1| + |y-y_1|$$
$$N((0,0),1) = \{(x,y)\in R^2 : |x-0|+|y-0|<1\}$$
$$= \{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|<1\}$$

[illegible]

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d(x,y)$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, \ldots, y_n)$$



النقط التي داخل المثلث هي نقط الربع الأول

التي تحقق المتراجحة $|x|+|y|<1$

الربع الثاني $-x+y=1$

النقط الداخلية تحقق المتراجحة $-x+y<1$

الربع الثالث $-x-y=1$

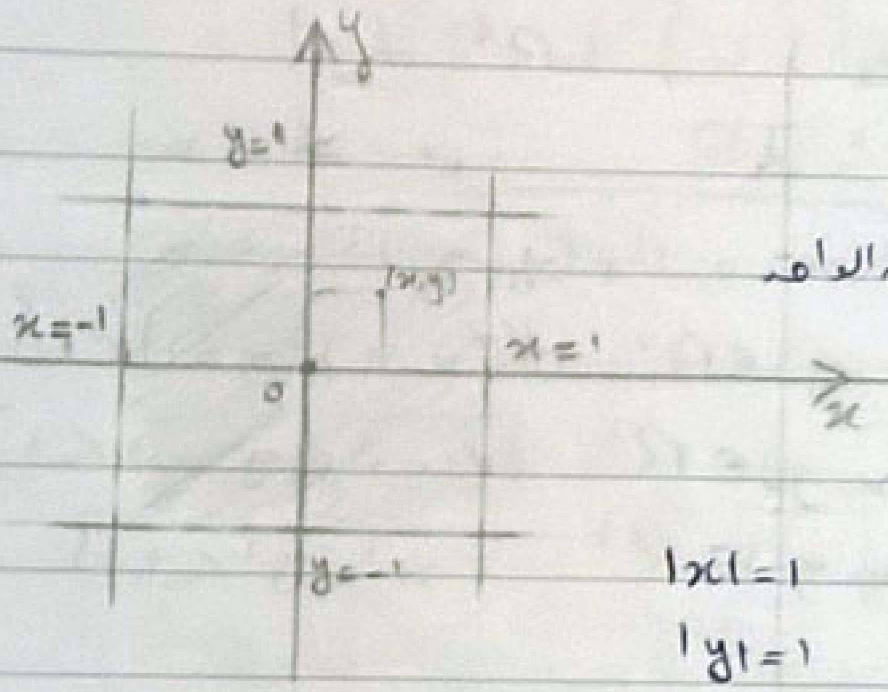
في (R^2, d_∞) *

$$d_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i|$$

$$N((0,0),1) = \{(x,y)\in R^2 , d_\infty((x,y),(0,0))<1\}$$

$$= \{(x,y)\in R^2 : \max\{|x-0|,|y-0|\}<1\}$$

$$= \{(x,y)\in R^2 : \max\{|x|,|y|\}<1\}$$



النقطة بالقيمة المطلقة لها أصغر من الواحد

محصورة بين العمودين

- نقطة تقع ضمن الربع الأول

مثلاً

$|x|=1$

$|y|=1$

$\max\{|x|,|y|\}<1$

من السهل التحقق النقط التي خارج أو تقع على الخط ≥ 1

.

تمرين /4/

أثبت أن كل مجموعة وحيدة العنصر في فضاء متري (X,d) تكون مغلقة

الحل:

لتكن $A = \{a\}$ حيث $A \subset X$

لكي نبرهن أن A مجموعة مغلقة يجب أن نبرهن أن $X \setminus A$ مجموعة مفتوحة

$\forall y \in X \setminus A \quad , \exists\, r = d(y,a)$

لنبرهن أن

$N(y,r) \subset X \setminus A$

$a \notin X \setminus A$

ولنيل المطلوب يجب أن نبرهن أن

$a \notin N(y,r)$

نفرض جدلاً أن $a \in N(y,r)$

$\Rightarrow d(a,y) < r = d(a,y)$

وهذا يناقض كون $d(a,y) = d(a,y)$

وسبب التناقض الفرض الجدلي الخاطئ

$\Rightarrow \quad a \notin N(y,r) \Rightarrow$

$N(y,r) \subset X \setminus A \Rightarrow X \setminus A$

مجموعة مفتوحة

$\Rightarrow \quad A$ مغلقة

★ للمرة القادمة:

① أثبت أن $Z = \{\emptyset, X, A, A^c\}$ طبولوجيا على X حيث $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ وعين الحالات التي يكون فيها (X, Z) فضاء

منزلياً ② أثبت أن $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

انتهت