ملول عسية

المحاضرة العاشرة

١٦/٤/٢٠١٥م

تقريبات العناصر المنتهية

- ذكرنا سابقاً أن تقريبات العناصر المنتهية تستخدم عادة" للمسائل المعقدة، حيث تكون منطقة الدراسة غير منتظمة، وذلك لأنها تتيح إمكانية استخدام عدة أنواع من أشكال العناصر لتقسيم المنطقة المدروسة.

- إن كلفة العناصر المنتهية عالية جداً مقارنة "بطريقة الفروق المنتهية"، لذلك دوماً نختار طريقة الفروق المنتهية في حال كانت منطقة الدراسة منتظمة.

- سوف نقوم بدراسة تقريبات العناصر المنتهية للمعادلات التفاضلية العادية، وليس المعادلات التفاضلية الجزئية، وذلك في بعد واحد 1D.
علماً أن البعد الواحد يعني قطعة مستقيمة منتظمة، ومن الأولى استخدام طريقة الفروق هنا، ولكن دراسة تقريبات العناصر المنتهية في 2D هو أمر معقد جداً ولن نستطيع الخوض فيه في هذا المقرر.

- سوف ندرس أربع طرق في هذا المجال:
1) طريقة رايلي - ريتز.
2) طريقة رايلي - ريتز الخطية قطعياً.
حيث سندرس في هاتين الطريقتين مسألة القيم الحدية التالية:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)\,u=f(x)$$

حيث: $0\leq x\leq 1$, $u(0)=u(1)=0$

3) طريقة غالركين.
4) طريقة العناصر المنتهية.
حيث سندرس في الطريقتين الأخيرتين مسألة القيم الحدية التالية:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u'+r(x)u=f(x)$$

حيث: $0\leq x\leq 1$, $u(0)=u(1)=0$

ملاحظة: من الضروري حفظ الشكل العام المذكور للمعادلة التفاضلية المقابل لكل طريقة، وذلك لمقارنته مع المعادلة المعطاة في المسألة وإيجاد كل من: $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$
وذلك لأننا سنحتاجها من أجل تطبيق القوانين فيما بعد

الصيغة الضعيفة للمسألة: Weak Form

تدعى صيغة مسألة القيم الحدية بهذا الشكل في كلا النموذجين المذكورين بالصيغة القوية ومنها مشتق للتابع من المرتبة الثانية.
إن إيجاد الصيغة الضعيفة للمسألة يعني إيجاد صيغة ذات مرتبة مشتق أخفض (أي مشتق التابع فيها من المرتبة الأولى)
بحيث يكون حل الصيغة الضعيفة هو نفسه حل المسألة المعطاة.
ويتم ذلك كمايلي:

1) نضرب طرفي المعادلة بتابع $v(x)$ يدعى تابع الوزن Weight function
2) نكامل الطرفين على المجال $[0,1]$.
3) بالإصلاح والاستفادة من الشروط الحدية: $u(0)=u(1)=0$
نحصل على الصيغة الضعيفة التي تحوي المشتقة من المرتبة الأولى فقط للتابع u.

1 طريقة رايلي - ريتز: (الاستنتاج النظري غير مطلوب)

- لتكن مسألة القيم الحدية:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right)+q(x)\,u=f(x)$$

حيث $0\leq x\leq 1\ ,\ u(0)=u(1)=0$

- إن الصيغة الضعيفة لهذه المسألة سيكون لها الشكل:

$$\boxed{\int_0^1 (p\,u'v')\,dx+\int_0^1 (v\,q\,u)\,dx-\int_0^1 (v\,f)\,dx=0}$$

مبرهنة: ليكن: $p\in C^1[0,1]\ ,\ p(x)\geq\delta>0\ ,\ q(x)\geq 0$

من أجل $0\leq x\leq 1$. إن التابع $u\in C_0^2[0,1]$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية:

$$\text{I}\qquad -\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right)+q(x)\,u=f(x)\qquad ;\ 0\leq x\leq 1$$

إذا وفقط إذا كان التابع الوحيد من $C_0^2[0,1]$ الذي يجعل التكامل التالي أصغرياً:

$$I(u)=\int_0^1\{p(x)\,[u']^2+q(x)\,[u]^2-2\,f(x)\,u\}\,dx\qquad \circledast$$

- تعتمد طريقة رايلي - ريتز على افتراض الحل من الشكل:

$$u^*=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi_i=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\dots+c_n\varphi_n$$

(حيث $n\geq 2$ اختيارية أو معطاة في نص المسألة)

حيث c_i هي وسطاء مهمتنا تعيينها.

و φ_i هي مجموعة دوال القاعدة وتسمى توابع الاختبار test function

- ويشترط على توابع الاختبار أن تحقق الشروط :
* مستمرة على الساحة المدروسة .
* تحقق الشروط الحدية للمسألة ، أي : $\forall i \quad u_i(0) = u_i(1) = 0$
* مستقلة خطياً عن بعضها البعض .
* بشكل عام نختار توابع الاختبار بحيث تحقق فيزياء المسألة .

- الآن حسب المبرهنة السابقة ، فإن u^* لا يكون الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية (I) إذا وفقط إذا كان التابع الوحيد الذي يجعل التكامل ⊛ أصغرياً .
لنعوض u^* في ⊛ :

$$I(u^*) = I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right]$$

$$I(u^*) = \int_0^1 \left\{ p(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i'\right]^2 + q(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\} dx$$

ولإيجاد $\min I(u^*)$ ، إذا اعتبرنا I دالة تابعة للمجاهيل $c_1, c_2, \dots, c_n$
فإنه يجب أن يتحقق :

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x)\sum_{i=0}^{n} c_i u_i' u_j' + 2q(x)\sum_{i=0}^{n} c_i u_i u_j - 2f(x)u_j \right\} dx$$

بالإصلاح ومساواة المشتق بالصفر نجد أن :

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\int_0^1 \{ p(x) u_i' u_j' + q(x) u_i u_j \} dx\right] c_i = \int_0^1 f(x) u_j \, dx$$

حيث $j = 1, 2, \dots, n$.

ونلاحظ أن المعادلات الأخيرة تكتب كجملة خطية بالشكل المصفوفي $AC = B$
متغيراتها : $c_1, c_2, \dots, c_n$

وحيث A مصفوفة متناظرة تعطى عناصرها بالشكل:

حفظ
$$\boxed{a_{ij} = \int_0^1 \left[p(x)\, u_i'(x)\, u_j'(x) + q(x)\, u_i(x)\, u_j(x) \right] dx}$$

حيث: $i, j = 1, 2, \dots, n$

ونستفيد من كون A متناظرة في أن: $a_{ij} = a_{ji}$

أما المصفوفة B فتعطى عناصرها بالشكل:

حفظ
$$\boxed{b_i = \int_0^1 f(x)\, u_i(x)\, dx} \quad ; \; i = 1, \dots, n$$

مثال: أوجد الشكل المصفوفي لمسألة القيم الحدية التالية:

$$u''(x) = -x$$

حيث: $u(0) = u(1) = 0$

الحل: أولاً بمقارنة المعادلة التفاضلية المعطاة مع الشكل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة نجد:

$p(x) = -1$ (بسبب وجود (-) قبل المشتق الثاني في الشكل العام)

$q(x) = 0$ (لأن الحد u غير موجود)

$f(x) = -x$ (الطرف الثاني).

سنختار توابع الاختبار بالشكل: $u_i(x) = x^i (1-x) \;\; ; \; i = \overline{1,n}$

وهي توابع مستمرة، مستقلة خطياً، وتحقق الشروط الحدية.

ولنأخذ $n = 2$ (للتسهيل وتخفيف الحسابات)، ولنوجد الحل: $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$

من أجل ذلك نريد تعيين الثوابت c_1, c_2.

/ /

لدينا :
$u_1(x) = x(1-x) \Longrightarrow u_1'(x) = 1-2x$

$u_2(x) = x^2(1-x) \Longrightarrow u_2'(x) = x(2-3x)$

- نريد إيجاد الشكل المصفوفي $AC = B$.

حيث أن عناصر المصفوفة A تعطى بالشكل:

$$a_{ij} = \int_0^1 \left[p(x)\, u_i' u_j' + q(x)\, u_i u_j \right] dx$$

* $$a_{11} = \int_0^1 \left[p(x)\, u_1' u_1' + q(x)\, u_1 u_1 \right] dx$$

$$a_{11} = \int_0^1 \left[-(1-2x)^2 + 0 \right] dx = -0.3\overline{3}$$

* $$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 \left[p(x)\, u_1' u_2' + q(x)\, u_1 u_2 \right] dx$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 \left[-(1-2x)\, x(2-3x) + 0 \right] dx = -0.166\overline{6}$$

* $$a_{22} = \int_0^1 \left[p(x)\, u_2' u_2' + q(x)\, u_2 u_2 \right] dx$$

$$a_{22} = \int_0^1 \left[-x^2(2-3x)^2 + 0 \right] dx = -0.13333$$

أما عناصر المصفوفة B فتعطى بالشكل:

$$b_i = \int_0^1 f(x)\, u_i(x)\, dx$$

$$b_1 = \int_0^1 f(x)\, u_1(x)\, dx = \int_0^1 \left(-x^2(1-x)\right) dx = -0.083333$$

$$b_2 = \int_0^1 f(x)\, u_2(x)\, dx = \int_0^1 \left(-x^3(1-x)\right) dx = -0.05$$

ومنه يصبح الشكل المصفوفي للمسألة هو :

$$\begin{bmatrix} -0.3\overline{3} & -0.166\overline{6} \\ -0.166\overline{6} & -0.13333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.083333 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

إذا قمنا بحل الجملة المصفوفية السابقة نجد : $C_1 = C_2 = \frac{1}{6}$

ومنه فالحل وفق رايلي - ريتز للمسألة الحدية المعطاة يكون :

$$u = \frac{1}{6}\, u_1 + \frac{1}{6}\, u_2$$

$$u = \frac{1}{6}\, x(1-x) + \frac{1}{6}\, x^2(1-x)$$

$$u = \frac{x(1-x^2)}{6}$$

ونلاحظ أن هذا الحل هو الحل الدقيق للمسألة المعطاة .

مثال: أوجد الشكل المصفوفي لمسألة الشروط الحدية التالية :

$$u'' + u = x$$

حيث : $u(0) = u(1) = 0$

الحل: بمقارنة المعادلة التفاضلية المعطاة مع الشكل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة نجد: $f(x) = x \quad , \quad q(x) = 1 \quad , \quad p(x) = -1$

سنختار توابع الاختبار بالشكل : $u_i(x) = x^i(1-x) \quad ; \quad i = \overline{1,n}$

وهي توابع مستمرة ، مستقلة خطياً ، وتحقق الشروط الحدية للمسألة .

وبأخذ $n = 2$ ، لنوجد الحل : $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$

من أجل ذلك نريد تعيين الثوابت C_1 , C_2

وبنفس الطريقة نوجد الشكل المصفوفي $AC = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \int_0^1 [p(x) u_1' u_1' + q(x) u_1 u_1]\, dx$$
$$a_{11} = \int_0^1 [-(1-2x)^2 + x^2(1-x)^2]\, dx = -0.3$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 [p(x) u_1' u_2' + q(x) u_1 u_2]\, dx$$
$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 [-(1-2x)x(2-3x) + x^3(1-x)^2]\, dx = -0.15$$

$$a_{22} = \int_0^1 [p(x) u_2' u_2' + q(x) u_2 u_2]\, dx$$
$$a_{22} = \int_0^1 [-x^2(2-3x)^2 + x^4(1-x)^2]\, dx = -0.12381$$

$$b_1 = \int_0^1 f(x) u_1(x)\, dx = \int_0^1 x^2(1-x)\, dx = 0.083333$$

$$b_2 = \int_0^1 f(x) u_2(x)\, dx = \int_0^1 x^3(1-x)\, dx = 0.05$$

ومنه تصبح الجملة المصفوفية $AC = B$ بالشكل :

$$\begin{bmatrix} -0.3 & -0.15 \\ -0.15 & -0.12381 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.083333 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

نهاية المحاضرة العاشرة