سلوك تابع عقدي في جوار ∞ :

$z \longmapsto \frac{1}{z}$ تابع معرف على $\mathbb{C}^*$

ينقل أي جوار للصفر (محذوف المركز) إلى جوار لـ ∞

وينقل أي جوار لـ ∞ إلى جوار للصفر (محذوف المركز)

لذلك لدراسة نقطة ∞ بالنسبة للتابع f نقوم بدراسة نوع $t=0$ بالنسبة للتابع $\boxed{g(t)=f\left(\frac{1}{z}\right)}$

⊗ جوار ∞ هو خارج أي قرص مركزه المبدأ

أي هو أي حلقة مركزها المبدأ ونصف قطرها الخارجي ∞ $(ann(0,r,\infty))$

⊗ ندرس نقطة اللانهاية الشاذة فقط عندما يطلب بشكل صريح

ادرس النقطة الشاذة $z=\infty$

⊗ ($z=\infty$ شاذة معزولة) $\overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow}$ (وجود جوار لـ ∞ لا يحوي أي نقطة شاذة لـ f)

$\Longleftrightarrow$ (يمكن جعل جميع النقاط الشاذة لـ f داخل قرص مركزه المبدأ وليكن $D(0,r)$)

$\Longleftrightarrow$ ($t=0$ شاذة معزولة لـ g)

f تحليلي على $ann(0,r,\infty)$

g تحليلي على $ann\left(0,0,\frac{1}{r}\right)$

مثال: $f(z)=\frac{1}{\sin z}$

$z=\infty$ هي نقطة شاذة غير معزولة.

طريقة 1: بتبديل $z \longrightarrow \frac{1}{t}$ $\Leftarrow$ $g(t)=\frac{1}{\sin\frac{1}{t}}$

لأن $t=0$ شاذة غير معزولة للتابع g (وقد أثبت ذلك سابقاً)

طريقة 2:

النقاط الشاذة لـ f هي أصفار $\sin z$

أي هي حلول $\sin z=0$ ومنه هي $z_k=\pi k\,;\ k\in\mathbb{Z}$

$|z_k| = \pi |k| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \Rightarrow z_k \to \infty$

⇐ ∞ نقطة تجمع لِ z_k

⇐ أي جوار لِ ∞ سيحوي عدد غير منته من حدود z_k

والتي جميعها نقاط شاذة للتابع f

إذاً $z=\infty$ شاذة غير معزولة.

مثال $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

$z=\infty$ نقطة شاذة معزولة لِ f لأن النقاط الشاذة لِ f هي

$z=0$, $z_k = \dfrac{1}{\pi k}$; $k \in \mathbb{Z}^*$

وجميع هذه النقاط موجودة ضمن قرص الواحدة.

تنويه:

⊛ $z=\infty$ شاذة كاذبة لِ f ⟺ $t=0$ شاذة كاذبة لِ g

⊛ $z=\infty$ قطب من المرتبة m لِ f ⟺ $t=0$ قطب من المرتبة m لِ g

⊛ $z=\infty$ شاذة أساسية لِ f ⟺ $t=0$ شاذة أساسية لِ g

مثال $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

$g(t) = f(\frac{1}{t}) = e^{\frac{1}{\frac{1}{t}}} = e^t \quad , \forall t \in \mathbb{C}^*$

وبما أن $t=0$ نقطة شاذة كاذبة لِ g فإن $z=\infty$ شاذة كاذبة لِ f.

مثال $f(z) = e^z$

$g(t) = f(\frac{1}{t}) = e^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!\, t^2} + \cdots$

⇐ $t=0$ شاذة أساسية لِ g ⇐ $z=\infty$ شاذة أساسية لِ f.

مثال وظيفة: $f(z) = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{3}{z^2} + \dfrac{1}{z-i} + 2i z^5 - (1+i) z^7$

الحل $t=0$ قطب من المرتبة 7

⇐ $z=\infty$ قطب من المرتبة السابعة لِ f.

انتهت المحاضرة السابعة عشر