4/5/2015 — المحاضرة الثالثة عشرة — الاثنين :

مميزات التمثيلات

مقدمة :

1. اذا كان $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ فإن $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (مجموع عناصر القطر الرئيسي) .

ويكون $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$ اي ان المصفوفات المتشابهة لها الأثر نفسه

وبالتالي اذا كان $f : V \to V$ مؤثراً خطياً عندئذ يمكننا تعريف أثر المؤثر الخطي f

بأنه اثر مصفوفة f بالنسبة لأساس ما S في V : اي :

$$tr(mat(f,S,S)) = tr\, f$$

« حيث انه اذا تغيرت القاعدة S ستتغير المصفوفة لكن سيبقى الأثر نفسه لأن المصفوفتين متشابهتان وبالتالي لهما نفس الأثر »

تعريف : ليكن $T : G \to GL(V)$ تمثيلاً للزمرة G على الفضاء $V(\mathbb{C})$ عندئذ نعرف مميز التمثيل T بأنه التطبيق :

$$\chi_T : G \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$g \longmapsto tr\, T_g = \chi_T(g) \quad ; \quad \forall g \in G$$

((المميز يحول كل عنصر بأثر مصفوفة T_g)) .

صفات هذا التطبيق (المميز) مدرجة في المبرهنة التالية :

مبرهنة : اذا كان $T : G \to GL(V)$ تمثيلاً لزمرة G على الفضاء $V(\mathbb{C})$ فإن :

1- $\chi_T(e) = \dim V$: مميز تمثيل الحيادي هو بعد الفضاء .

2- $\chi_T(h.g.h^{-1}) = \chi_T(g)$ وذلك اياً كان $h, g \in G$.

3- if $\underbrace{O(g)}_{\text{مرتبة العنصر } g \text{ منتهية أي } \exists m \in \mathbb{Z}^+ ;\ g^m = e} < \infty$ then $\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}$

4- if $\underset{T \text{ قابل للتفكيك}}{T} = T_1 + T_2$ then $\chi_T = \chi_{T_1} \underset{\text{جمع التطبيقات}}{+} \chi_{T_2}$

الاثبات :

1- $\chi_T(e) = tr\, T_e = tr\, I_V = \dim V$

حيث I_V هو المطابق في V ومصفوفته بالشكل $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ عدد الواحدات فيه n

2- $\chi_T(h\cdot g\cdot h^{-1}) = tr\,T_{h\cdot g\cdot h^{-1}} = tr\,(\underbrace{T_h\cdot T_g\cdot T_{h^{-1}}}_{\text{مصفوفة مشابهة لـ } T_g}) = tr\,T_g$

$= \chi_T(g)$

ملاحظة: في الحقل المغلق جبرياً مثل $\mathbb{C}$: اذا كانت λ قيمة ذاتية لـ P فإن λ^m قيمة ذاتية لـ P^m حيث $m \in \mathbb{Z}^+$.

3- if $o(g) = m \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^+ ; g^m = e \Rightarrow T_{g^m} = T_e = I_V$

$(\dim V = n)$

لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ قيم ذاتية للمؤثر T_g « كون $\mathbb{C}$ مغلق جبرياً في يوجد n قيم ذاتية لـ T_g »

عندئذ:

$\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ قيماً ذاتية لـ $T_g^m = T_{g^m} = I_V$ فإن:

« القيم الذاتية لمؤثر خطي مصفوفته قطرية هي عناصر القطر الرئيسي لها وحيث I_V المطابقة مصفوفته هي مصفوفة الواحدة اذاً قيمه الذاتية هي عناصر قطره الرئيسي »

اذاً $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m = n \;\Longrightarrow\; |\lambda_i| = 1$ حيث $i = 1, \dots, n$

اذاً $\bar{\lambda}_i = \lambda_i^{-1}$

> اذا كانت طويلة عدد عقدي تساوي الواحد فإن مقلوبه يساوي مرافقه
> لأن $\lambda_i \cdot \bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 = 1$
> $\Rightarrow \bar{\lambda}_i = \lambda_i^{-1}$

$$\chi_T(g^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{\chi_T(g)}$$

4- اياً كان $g \in G$ فإن:

$$\chi_T(g) = \chi_{T_1+T_2}(g) = tr\,(T_1+T_2)_g \underset{\text{الأثر هو تطبيق خطي}}{=} tr\,T_{1g} + tr\,T_{2g}$$

$$= \chi_{T_1}(g) + \chi_{T_2}(g)$$

أو نفرض أن

$$T = \left(\begin{array}{c|c} T_1 & 0 \\ \hline 0 & T_2 \end{array}\right)$$

فيكون:

$tr\,T = tr\,T_1 + tr\,T_2$

وهو المطلوب.

/ /

مناقشة :

* ليكن $T: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيل للزمرة G على الفضاء $\mathbb{C}$ عندئذ لنأخذ مجموعة كل التطبيقات من G الى $\mathbb{C}$ نرمز لها ب $\mathbb{C}^G$:

$$\mathbb{C}^G = \{ G \longrightarrow \mathbb{C} \}$$

ولنزود هذه المجموعة بقانوني تشكيل (داخلي وخارجي) :

اذا كانت $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x_1 , x_2 \in \mathbb{C}^G$

+ داخلي : $(x_1 + x_2)(g) = x_1(g) + x_2(g)$

. خارجي : $(\alpha . x)\, g = \alpha . x(g)$

نجد بسهولة ان $\mathbb{C}^G$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.

* ولنأخذ التطبيق :

$$\varphi : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\rho , \tau) \longmapsto \varphi(\rho , \tau) = \langle \rho , \tau \rangle_G = |G|^{-1} . \sum_{g \in G} \rho(g) . \overline{\tau(g)}$$

نجد ان هذا التطبيق هو جداء سلمي على الفضاء $\mathbb{C}^G$ لأن : اذا كانت $\rho , \rho_1 , \rho_2 , \tau$ من $\mathbb{C}^G$ و $\alpha \in \mathbb{C}$:

1) $\langle \alpha \rho_1 + \rho_2 , \tau \rangle = |G|^{-1} . \sum_{g \in G} (\alpha \rho_1 + \rho_2) . \overline{\tau(g)}$

فضاء شعاعي $\mathbb{C}^G$ $= |G|^{-1} . \sum_{g \in G} \alpha \rho_1(g) \overline{\tau(g)} + |G|^{-1} . \sum_{g \in G} \rho_2(g) . \overline{\tau(g)}$

$= \alpha \langle \rho_1 , \tau \rangle + \langle \rho_2 , \tau \rangle$

اذا φ خطي بالنسبة للمركبة الأولى .

2) $\overline{\langle \rho , \tau \rangle} = \overline{|G|^{-1} . \sum_{g \in G} . \rho(g) . \tau(g)} =$

$= |G|^{-1} . \sum_{g \in G} \overline{\rho(g)} . \tau(g) = |G|^{-1} . \sum_{g \in G} \tau(g) . \overline{\rho(g)}$

$= \langle \tau , \rho \rangle$

اذاً φ هرميتي .

3) $\langle \rho , \rho \rangle = |G|^{-1} . \sum_{g \in G} \underbrace{\rho(g) . \overline{\rho(g)}}_{\text{جداء عدد مع مرافقه}} = |G|^{-1} . \sum_{g \in G} |\rho(G)|^2 \geqslant 0$

$\forall \rho \in \mathbb{C}^G$

4) $\forall \rho \in \mathbb{C}^G \setminus \{0\} \quad ; \quad \langle \rho,\rho\rangle = |G|^{-1}\cdot\sum \rho(g)\cdot\overline{\rho(g)} \underset{\rho\neq 0}{>} 0$

لأن $\rho \neq 0$

وبذلك نجد أن فضاء التطبيقات $\mathbb{C}^G$ هو فضاء جداء سلمي $T: G \to GL(V)$
تمثيل لزمرة منتهية G على فضاء $V(\mathbb{C})$ فإن $\mathbb{C}^G$ فضاء جداء سلمي على
الحقل $\mathbb{C}$ والجداء السلمي هو:

$$\langle \rho,\tau\rangle = |G|^{-1}\cdot\sum_{g\in G}\rho(g)\cdot\overline{\tau(g)} \quad ; \quad \forall \rho,\tau\in\mathbb{C}^G$$

* لنأخذ من الفضاء $\mathbb{C}^G$ أسرة من التوابع $\Gamma: G \to \mathbb{C}$ تحقق الشرط:

$$\Gamma(h.g.h^{-1}) = \Gamma(g)$$

مجموعة جزئية

نسمي كل عنصر من هذه المجموعة (عناصر هذا التوابع) تابع مركزي للزمرة G أي أن.

التابع المركزي: هو تابع $\Gamma: G \to \mathbb{C}$ ويحقق $\Gamma(h.g.h^{-1}) = \Gamma(g)$

مبرهنة: إذا كان $T: G \to GL(V)$ تمثيلاً لزمرة منتهية G على فضاء $V(\mathbb{C})$
وكان Γ تابعاً مركزياً للزمرة G وكان:

$$\rho = \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\cdot T_g$$

فإن $\rho = \lambda I_V$ ويكون $\lambda = \frac{|G|}{\chi_T(e)}\cdot\langle \chi,\Gamma\rangle_G$

الإثبات: لإثبات هذه المبرهنة نعتمد على مبرهنة Schur

فكرة ≫: لنثبت أولاً أن ρ يحقق: $\forall a\in G: \quad T_a\cdot\rho = \rho\cdot T_a$

أي لنثبت أن $\rho = T_a\cdot\rho\cdot T_a^{-1}$

≪ عندئذ يكون $\rho = \lambda I_V$ و $\lambda = \frac{tr\,\rho}{\dim V}$

لبيان ذلك $a\in G$ فإن:

$$T_a\cdot\rho\cdot T_a^{-1} = \sum T_a\cdot\underbrace{\overline{\Gamma}(g)}_{\text{عنصر من } \mathbb{C} \text{ (عدد)}}\cdot T_g\cdot T_a^{-1}$$

$$= \sum_{g\in G} T_a\,\overline{\Gamma}(aga^{-1})\cdot T_g T_{a^{-1}} = \sum_{g\in G}\overline{\Gamma}(a.g.a^{-1})\cdot T_a\cdot T_g\cdot T_{a^{-1}}$$

$$= \sum_{g\in G}\overline{\Gamma}(a.g.a^{-1})\cdot T_{a.g.a^{-1}} = \sum_{x\in G}\overline{\Gamma}(x)\cdot T_x = \rho$$

إذن حسب مبرهنة Schur يكون: $f = \lambda I_V$ ويكون $\lambda = \dfrac{tr\, f}{\dim V}$

فلإثبات المطلوب يكفي أن نثبت على أن:

$$\frac{|G|}{\chi_T(e)} \langle \chi , \Gamma' \rangle_G \stackrel{?}{=} \frac{tr\, f}{\dim V}$$

أن:

$$\frac{|G|}{\chi_T(e)} \langle \chi , \Gamma \rangle_G = \frac{|G|}{\dim V} \cdot |G|^{-1} \cdot \sum_{g \in G} \chi(g) \cdot \overline{\Gamma}(g)$$

$$= \frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} tr(T_g) \cdot \overline{\Gamma'}(g)$$

$$= \frac{1}{\dim V} \cdot tr \sum_{g \in G} T_g \cdot \overline{\Gamma}(g) = \frac{tr\, f}{\dim V}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{|G|}{\chi_T(e)} \langle \chi$$

Finished Lecture ....

Eman ALhalaboni