المحاضرة 15

تعريف: R في ID (منطقة تكاملية)

نقول أن R هي منطقة إقليدية إذا وجد دالة أو تطبيق

$\varepsilon : R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$

(1)

تحقق $\forall a,b \in R\setminus\{0\}$ ، $b = aq + r$

$\exists q, r \in R$; بحيث $r = 0$ أو $\varepsilon(r) < \varepsilon(a)$

نرمز لها ED (منطقة إقليدية)

2) نقول أن R منطقة مثاليات رئيسية $\Leftrightarrow$ كل مثالي فيها مولد بعنصر وحيد ونرمز لها بالرمز (PID)

3) نقول أن R منطقة تحليل وحيد إذا وفقط إذا تحقق:

$\forall r \neq 0$ ، $r \in R\setminus U(R)$

يكتب على شكل جداء منتهٍ لعناصر أولية في R

((وإذا كتبنا بطريقة أخرى يبقى التحليل وحيد))

أي أن $r = \prod_{i=1}^{n} p_i$ حيث p_i عنصر أولي في R

((... p_i ...))

أمثلة: إذا كانت $R_1 = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ فإن R_1 منطقة إقليدية لأنه يوجد دالة

$\varepsilon : R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$

$\forall r \in R\setminus\{0\} : \varepsilon(r) = |r|$

ب- R حقل فإن $R[x]$ هي ED هي منطقة إقليدية لأنه:

$\varepsilon : R[x] \setminus 0 \to \mathbb{N}$

$\forall f \in R[x] \setminus \{0\} \ : \ \varepsilon(f) = \deg f$

((حسب خوارزمية القسمة))

$\forall f, g \in R[x] \setminus \{0\} \ : \ \exists q, r \in R[x]$

$f = gq + r \quad r = 0$

$\underbrace{\varepsilon(r) = \deg(r)} < \underbrace{\deg(g) = \varepsilon(g)}$

((لندرس العلاقة بين الاقليدية وحلقة المثاليات الرئيسية))

(مبرهنة) إذا كانت R في $ED \Leftarrow R$ في PID

الإثبات: لتكن I مثالي في R نميّز حالتين:

1) $I = \langle 0 \rangle$ تم المطلوب ((إذا كان I مثالي صفري يتم المطلوب))

2) $I \neq \langle 0 \rangle$ ((لا يعني بوجود عنصر في I لا يساوي الصفر))

بما أن R إقليدية توجد دالة ε

$\varepsilon : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$

وبالتالي يمكن أن نفرض أنه يوجد عنصر $a \in I$

حيث يكون $\varepsilon(a)$ أصغري ((أصغري أي $b \in I$, $\varepsilon(b) \leq \varepsilon(a)$

المثالي المولد بـ a محتوى في I (($\varepsilon(a) = \varepsilon(b)$

$(\langle a \rangle \subseteq I)$

للاحتواء المعاكس من أجل:

((حسب خوارزمية القسمة))

$b \in I \ : \ \exists q, r \in R \ ; \ b = aq + r$

$r = 0$ أو $\varepsilon(r) < \varepsilon(a)$

نفرض جدلاً أن $r \neq 0$ ننتقل للطرف الثاني

$$r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{aq}_{\in I} \in I$$

وهذا يناقض كون $\varepsilon(a)$ أصغري في I ، $r \notin I$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي $r = 0$

ومنه $b = aq \Rightarrow b \in \langle a \rangle \Rightarrow I \subseteq \langle a \rangle$

$$I = \langle a \rangle$$

وبالتالي عليه تكون R حلقة مثاليات رئيسية

أمثلة: $\mathbb{Z}$ منطقة مثاليات رئيسية لأنها إقليدية

$\mathbb{Q}[x]$ إقليدية حسب المثال لأن $\mathbb{Q}$ حقل

$\mathbb{Q}[x]$ منطقة مثاليات رئيسية لأنها إقليدية

2) كل حقل هو ED وأيضاً هو PID

مبرهنة: لتكن R منطقة مثاليات رئيسية (PID)

وكان $R \ni r \neq 0$ إن القضايا التالية صحيحة:

1) r غير قابل للتحليل إذا وفقط إذا كان المثالي المولد بـ r أعظمي ($\langle r \rangle \triangleleft_{\max} R$).

2) إذا كان R غير قابل للتحليل فإن r عنصر أولي في R

3) $\text{Max-Spec}(R) \cup \{0\} = \text{Spec}(R)$

المثالي الصفري دائماً أولي فقط في ID

ملاحظة # R منطقة تكاملية فإن 0 مثالي أولي

بينما في الحالة العامة ليس أولي

مثال: في $\mathbb{Z}_6$ مثلاً $2 \cdot 3 \in$ المثالي الصفري لكن المثالي $2 \notin$ و $3 \notin$

اثبات :

1) ($\Leftarrow$) نفرض أن R غير قابل للتحليل
لتكن $I \trianglelefteq R$ تحقق :

$\langle r \rangle \subseteq I \subseteq R$

$\exists\, a \in R ;\ I = \langle a \rangle$

لأن الحلقة مثالية رئيسية أي مثالي مولد بعنصر هو وحيد

$\langle r \rangle \subseteq \langle a \rangle \subseteq R \Rightarrow \exists\, u \in R : r = u.a$

a يقسم r

بما أن R غير قابل للتحليل $\Leftarrow$ $a \in U(R)$ أو $u \in U(R)$
$I = R$ أو $\langle r \rangle = \langle a \rangle$ $\Rightarrow$ $\langle r \rangle\ \triangleright.R$

إذا كان $u \in U(R)$ مترافقان أي $\langle r \rangle = \langle a \rangle$
وإذا كان $a \in U(R)$ فإن $I = R$ $\Leftarrow$ $\langle r \rangle\ \triangleright.R$

($\Rightarrow$) إذا كان $\langle r \rangle$ أعظمي
إذا كان $r \in U(R)$ فإن $\langle r \rangle = R$
فلا يصبح أعظمي

- أول شرط $r \neq 0 \in R \setminus U(R)$
- ثاني شرط $r = s.t$ بحيث تحقق $s, t \in R$

يجب أن نثبت إما الأول ينتمي لـ $U(R)$ أو الثاني ينتمي لـ $U(R)$

نستنتج :

$\langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle \subseteq R \Rightarrow$ إما $\langle r \rangle = \langle s \rangle$ أو $\langle s \rangle = R$

r و s مترافقان

$\Rightarrow$ إذا $\langle r \rangle = \langle s \rangle$ فإن $t \in U(R)$
أو إذا كان $\langle s \rangle = R$ أي $s \in U(R)$
وبالتالي ((r غير قابل للتحليل في R))

---

2) إذا كان r غير قابل للتحليل
حسب (1) r غير قابل للتحليل في R $\Leftarrow$ $\langle r \rangle\ \triangleright.R$
كل أعظمي في الحلقة التبديلية ومنه r مثالي أولي
الواحدية

$\Leftarrow$ $\langle r \rangle \in Spec(R)$ أولي

يبقى أن نثبت كل مثالي أولي مولد بعنصر أولي

لنفرض المطلوب لنبرهن أن r عنصر أولي يولد مثالي أولي

$\exists s,t \in R$ ؛ $t.s$ يقسم r $(r \mid s.t)$

$\Rightarrow s.t \in \langle r \rangle$

تعريف المثالي الأولي يكون مثالي يعني أو الثاني

$\Rightarrow s \in \langle r \rangle$ أو $t \in \langle r \rangle$

$\Rightarrow r \mid s$ أو $r \mid t$

بيّن أن كل مثالي رئيسي أولي يكون مولد بعنصر أولي

وبالتالي r عنصر أولي في R

---

٣) بما أن R حلقة تحليلية ومنه كل أعظمي هو أولي

المثاليات مجموعات

$M-Spec(R) \subseteq Spec(R)$.

يبقى اثبات الاحتواء المعاكس

$0 \neq I \in Spec(R)$ يبقى اثبات هو أعظمي

((كل مثالي أولي غير صفري في حلقة المثاليات الرئيسية يكون أعظمي))

$\Rightarrow \exists a \in R \,/\, I = \langle a \rangle$

وبالتالي يكون مولد بعنصر أولي حسب السابقة

$\Rightarrow$ a عنصر أولي في R

حسب السابق كل أولي بالمنطقة التكاملية هو غير قابل للتحليل

$\Leftarrow$ a (غير قابل للتحليل في R)

حسب (1) $\langle a \rangle \triangleleft\!\cdot R$

$\Rightarrow I \in M-Spec(R)$

$$spec(R) = \mathcal{X}\_spec(R) \cup \{0\}$$

(بالحالة العامة) غير صحيح (ED) تقتضي الوحدة

P أولي ⟸ P غير قابل للتحليل (غير صحيح)

وبالعكس أيضاً غير صحيح ⟸ (منطقة ثنائيات رتبة لمتحركات تعريف الحل غير صحيح)

مبرهنة: $PID \Longleftarrow UFD$ (منطقة التحليل الوحيد)

الإثبات: نعرف المجموعة M ...

مجموعة المثاليات الرئيسية للعناصر

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \langle r \rangle \Delta R : 0 \neq r \in R \setminus U(R) \\ r \neq \prod_{i=1}^{n} P_i \quad , n \in N \end{array} \right\}$$

أي لا يكتب كجداء أوليات

إذا هذه المجموعة موجودة في الإثبات (حيث $r = \prod_{i=1}^{n} P_i$)

نفرض جدلاً أن $M \neq \emptyset$ (أي موجودة)

مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء $(M, \subseteq)$

نأخذ سلسلة متزايدة من عناصر M

$$\langle r_1 \rangle \subseteq \langle r_2 \rangle \subseteq \dots$$

نأخذ من أجل ذلك

$I = \bigcup_i \langle r_i \rangle$ مثالي في R

(بسبب علاقة الاحتواء)

R هي حلقة مثاليات رئيسية أي يوجد

$\exists a \in R ; \quad I = \langle a \rangle$

I مولد بـ a

$\Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{N}\ ;\ a \in \langle r_i \rangle$

$a \neq 0 \in R\setminus U(R) \underset{\text{و}}{\overset{\text{وذلك}}{\Longrightarrow}}$ إذا فرضنا صدفة أ $a \in U(R)$
و $r_i \in U(R)$
وهنا بأن I اصطناع حد أعلى للسلسلة
الكلام غير ممكن أي أن $a \neq 0$ وو نفي لـ $U(R)$

$\Rightarrow \langle a \rangle \subseteq \langle r_i \rangle \subseteq I$

$\Rightarrow \langle a \rangle = \langle r_i \rangle \in M \rightarrow \langle r \rangle \in M$

وبالتالي تكون I حد أعلى للسلسلة في M.

ومن مبرهنة زورن يوجد عنصر أعظمي مثل $\langle r \rangle \in M$

يعني $\langle r \rangle \in M$

إذن

$0 \neq r \in R\setminus U(R)\ ,\ r \neq \prod_{i=1}^{n} p_i$

r قابل للتحليل لأنه $r = \prod_{i=1}^{1} r$

((مناقضة))

أي $\exists\, s, t \in R\setminus U(R)\ ;\ r = s.t$

$\Rightarrow \langle r \rangle \subsetneq \langle s \rangle$

(لو كان $\subseteq$ يكون قابل للقلب) غير قابل للقلب

$\langle r \rangle \subsetneq \langle t \rangle$

$\Rightarrow \langle s \rangle, \langle t \rangle \notin M$

~~إذاً اختل الشرط~~ $\cancel{r \neq \prod_{i=1}^{n} p_i}$

$\Rightarrow S = \prod_{i=1}^{l} P_i\ ,\ t = \prod_{i=l+1}^{k} p_i$ ((p_i عناصر غير قابلة للتحليل))

$r = s \cdot t = \prod_{i=1}^{k} p_i$

وهذا يناقض كون التالي المولد بـ $r \ni M$

(أي لا يجب أن تكون ماي) $(\langle r\rangle \in M)$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي أن $M = \emptyset$

ومنه يكتب $0 \neq r \in R \setminus U(R)$

$r = \prod_{i=1}^{n} p_i \ , \ n \in N$, p_i الا عناصر غير قابلة للتحليل

بما أن R منطقة مثاليات رئيسة كل عنصر غير قابل للتحليل هو عنصر أولي أي أن $\prod p_i = r$

حيث p_r عناصر أولية في R وبالتالي

R هي حلقة تحليل وحيد (UFD)

مبرهنة: إذا كانت R منطقة تكاملية فإن العبارات التالية متكافئة

1) R هي UFD (منطقة تحليل وحيد)

2) $0 \neq r \in R \setminus U(R)$

يكتب كـ جداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل في R وكل منها عنصر أولي

3) $r \neq 0 \in R \setminus U(R)$ يكتب بشكل وحيد كجداء منتهي لعناصر غير قابلة للتحليل

(الاثبات غير مطلوب)

[illegible]

تعريف: لتكن R حلقة تحليل وحيد و $r_1, r_2, \dots, r_n \in R \setminus \{0\}$

1) نقول عن $g \in R$ انه قاسم مشترك الأعظم للعناصر $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ إذا تحقق:

1) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : g \mid r_i$
(g يقسم r_i) (إذا وجد)

2) $\exists\, t \in R \; ; \; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : t \mid r_i$
$$\Rightarrow t \mid g$$
ونرمز له بالرمز $gcd(r_1, \dots, r_n) = g$

2) نقول أن $l \in R$ مضاعف مشترك أصغر للعناصر $r_1, r_2, \dots, r_n$ إذا وفقط إذا تحقق:

1) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : r_i \mid l$
l يقسم r_i

2) إذا وجد $t \in R$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
$r_i \mid t \Rightarrow l \mid t$
t يقسم l

مثال: 1) $R = (\mathbb{Z}\sqrt{-3}, +, \cdot)$

$a = 4$, $b = -2 + 2\sqrt{-3}$

إيجاد القاسم المشترك

$gcd(a, b) = ?$

2) $R = (\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$

$a = 6$, $b = 8$

$$lcm(a,b) = ?$$

تمرين: إذا كانت R حلقة تبديلية واحدية

1) إذا كان $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ (عرفنا طرد)

بين أنه ليس بالضرورة كل سلسلة تزايدية من المثاليات

في حلقة بالأن تنقطع

2) إذا كان $I_1, \dots, I_n \trianglelefteq R$ عرفنا طرد

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$$

بين أنه ليس بالضرورة هذا الكلام صحيح

(الجداء محتوى في أي من المثاليات)

$I_1 . I_2 \subseteq I_1$

$I_1 . I_2 \subseteq I_2$

3) R هي PID