منذجة رياضية

المحاضرة الثالثة عشرة

٢١/٤/٢٠١٥

المصفوفة الهيسية: (مصفوفة هيسيان)

ليكن لدينا التابع : $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- نعرّف تدرّج التابع f بالشكل:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- نعرف مصفوفة هيسيان للتابع f بأنها مصفوفة مربعة متناظرة من القياس $n \times n$ تعطى بالشكل:

$$H_{f(x_1, \ldots, x_n)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad ; \ i, j = \overline{1, n}$$

مثال: إذا كان $f(x_1, x_2)$ فإن مصفوفة هيسيان له:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial 2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial 2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial 2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial 2 f}{\partial^2 x_2} \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أنها من القياس 2×2.

اختبار التوابع المحدبة والمقعرة:

- يكون التابع f محدباً إذا كانت المصفوفة الهيسية له معرفة موجبة أو شبه معرفة موجبة من أجل كل قيم $x_1, \ldots, x_n$

- يكون التابع f مقعراً إذا كانت المصفوفة الهيسية له معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة من أجل كل قيم $x_1, \ldots, x_n$

تمرين: هل التابع f الآتي محدب أم مقعر؟

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

الحل: لمعرفة وضع هذا التابع إن كان محدباً أو مقعراً نقوم بإيجاد المصفوفة الهيسية لهذا التابع، من أجل ذلك نوجد المشتقات الجزئية لـ f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2x_1 - 2$$

إن مصفوفة هيسيان لها الشكل:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه المصفوفة متناظرة.

١- إن عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً.

٢- لنوجد المحددات الصغرى الأساسية الرئيسية:

إن المحدد الرئيسي من المرتبة 1 هو $|6| = 6 > 0$

أما المحدد الرئيسي من المرتبة 2 فهو:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

المحدد الرئيسي من المرتبة 3 هو:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2[8] + 2[24-4]$$
$$= -16 + 2(20) = 24 > 0$$

وبالتالي تحققت شروط المصفوفة المعرفة الموجبة.

ومنه فالمصفوفة H معرفة موجبة وبالتالي التابع f محدب.

مضاريب لاغرانج:

- لنفرض أن لدينا البرنامج الرياضي التالي:

أوجد القيمة الأصغرية للتابع: $f(x) \longrightarrow Min$

ضمن القيود: $g_i(x) = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$

حيث: $x = (x_1, \ldots, x_n)$

- عندئذٍ سنشكل تابع لاغرانج التالي:

$$L(x, \lambda_i) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

حيث λ_i قيم وسيطة عددها بعدد القيود.

- إن قيم $\{x_j , \lambda_i\}$ التي يبلغ عندها التابع L قيمة قصوى، يبلغ عندها $f(x)$ أيضاً قيمة قصوى.

فإذا كانت هذه القيمة القصوى أصغرية فتكون هي القيمة المطلوبة.

* يبلغ التابع L قيمته القصوى عندما تكون مشتقاته الجزئية بالنسبة لمتغيراته مساوية للصفر، أي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

بحل جملة هذه المعادلات نحصل على القيم التي يبلغ عندها L قيمته القصوى.

* تكون القيمة القصوى لـ f أصغرية (أعظمية) إذا كان:
  - التابع f محدب (مقعر)
  - تشكل القيود منطقة حلول محدبة.

مثال: أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2$$

مع مراعاة القيد:

$$2x_1 - x_2 = 4$$

الحل: نشكل تابع لاغرانج:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 - \lambda(2x_1 - x_2 - 4)$$

نوجد المشتقات الجزئية لتابع لاغرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 + 2 + \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 + x_2 + 4$$

إذا عدمنا المشتقات الجزئية السابقة نحصل على جملة المعادلات:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2 + \lambda = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

بالحل المشترك:

$$x_1^* = \frac{7}{11} \quad , \quad x_2^* = \frac{-30}{11} \quad , \quad \lambda = \frac{24}{11}$$

إن التابع $f(x)$ يبلغ قيمة قصوى عند هذه القيم، لتحديد نوعها:

- إن القيد تابع خطي فهو محدب ومقعر في آن معاً

- لمعرفة وضع تابع الهدف (محدب أو مقعر) نوجد مصفوفة هيسيان:

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

/ /

إن المصفوفة H متناظرة ، عناصر قطرها الرئيسي موجبة تماماً
لنوجد المحددات الصغرى الرئيسية :

* من المرتبة الأولى : $|6| = 6 > 0$

* من المرتبة الثانية :

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0$$

إذاً المحددات الصغرى الرئيسية موجبة تماماً
وعليه فإن مصفوفة هيسيان للتابع f مصفوفة معرفة موجبة
ومنه فالتابع f هو تابع محدب .
إذاً القيمة القصوى عند x_1^* , x_2^* للتابع f هي قيمة أصغرية
لأن تابع الهدف محدب والقيد محدب .
وقيمة التابع الأصغرية عند (x_1^*, x_2^*) هي :

$$f(x_1^*, x_2^*) = 3.54$$

تمارين : (لم تحلها الدكتورة)
أوجد القيمة الأصغرية للتابع :

* $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5$

مع مراعاة القيد :

$$g(x) = x_1 + x_2 = 6$$

الحل : نشكل تابع لاغرانج :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 5 - \lambda(x_1 + x_2 - 6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \implies 2x_1 - 4 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \implies 2x_2 + 2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \implies -x_1 - x_2 + 6 = 0$$

بالحل المشترك نجد:

$x_1^* = \frac{9}{2}$, $x_2^* = \frac{3}{2}$, $\lambda^* = 5$

إن التابع f يبلغ قيمة قصوى عند هذه القيم، لتحديد نوعها:

- إن القيد تابع خطي فهو محدب ومقعر في آن معاً.
- لمعرفة وضع تابع الهدف (محدب أو مقعر) نوجد مصفوفة هيسيان:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة معرفة موجبة (تحقق الشروط)

ومنه فالتابع f محدب، وبالتالي القيمة القصوى لـ f عند x_1^*, x_2^* هي قيمة أصغرية

وهي: $f(x_1^*, x_2^*) = 12.5$

* $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

مع مراعاة القيد:

$$g(x) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

الحل:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5$$

نشكل تابع لاغرانج:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5 - \lambda(x_1 - 2x_2 + 1)$$

إذا عدمنا المشتقات الجزئية لـ L نحصل على جملة المعادلات:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 - \lambda = 0 \\ 2x_2 - 2 + 2\lambda = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد: $x_1^* = \frac{9}{5}$, $x_2^* = \frac{7}{5}$, $\lambda^* = \frac{-2}{5}$

وبنفس الطريقة سنجد أن القيمة القصوى لـ f عند هذه النقاط هي قيمة أصغرية لأن القيد محدب وتابع الهدف محدب، ويكون: $f(x_1^*, x_2^*) = 0.2$

نهاية المحاضرة الثالثة عشرة