الاثنين ٢٧/٤/٢٠١٠م

المحاضرة الرابعة عشرة

التأويل الهندسي لتكامل استيلتجس

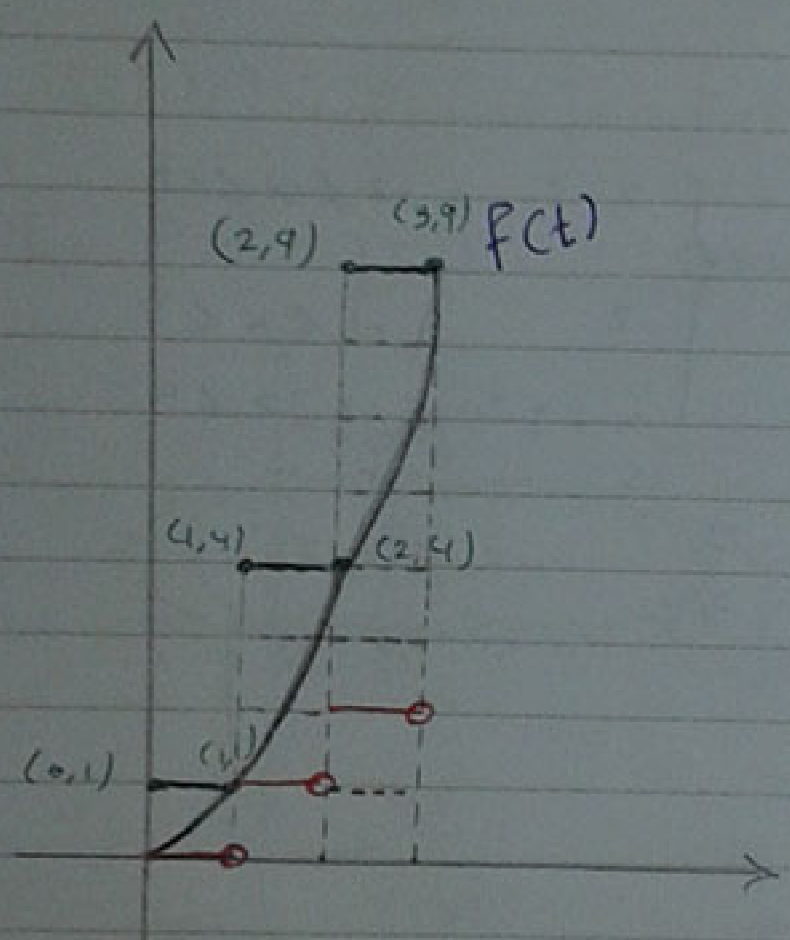
- ليكن لدينا التابع المعطى وسيطياً كالتالي:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad ; \quad t \in [a,b]$$

ولتكن لدينا نقاط انقطاع $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$

فيكون من أجل $i \in \{1,\dots,n\}$ فإن: $f(t_i)$ و $g(t_i-0)$ ، $g(t_i+0)$

ومثال توضيحي على ذلك:



$$y = f(t) = t^2$$

$$x = g(t) = [t] = \begin{cases} 0 & : 0 \le t < 1 \\ 1 & : 1 \le t < 2 \\ 2 & : 2 \le t < 3 \\ 3 & : t = 3 \end{cases}$$

لدينا نقاط الانقطاع هي:

$t = 1, \; t = 2, \; t = 3$

$t = 0 \Rightarrow f(0) = 0, \; g(0) = 0$

$t = 1 \rightarrow g(1+0) = 1 \; , \; f(1) = 1 \quad (1,1)$

$\quad\;\; \rightarrow g(1-0) = 0 \; , \; f(1) = 1 \quad (0,1)$ نصل بينهما (بالرسمة)

$t = 2 \rightarrow g(2+0) = 2 \; , \; f(2) = 4 \quad (2,4)$

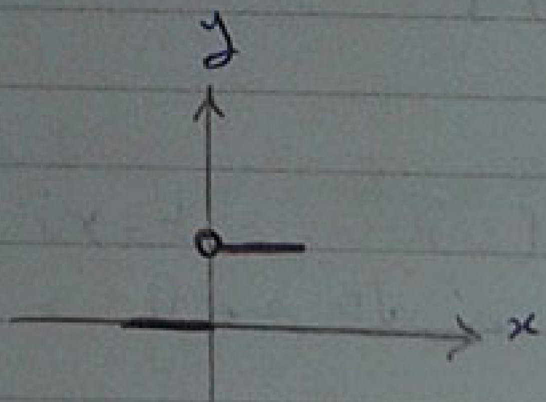
$\quad\;\; \rightarrow g(2-0) = 1 \; , \; f(2) = 4 \quad (1,4)$ نصل بينهما (بالرسمة).

$t = 3 \rightarrow g(3) = 3 \; , \; f(3) = 9 \quad (3,9)$

$\quad\;\; \rightarrow g(3-0) = 2 \; , \; f(3) = 9 \quad (2,9)$ نصل بينهما (بالرسمة)

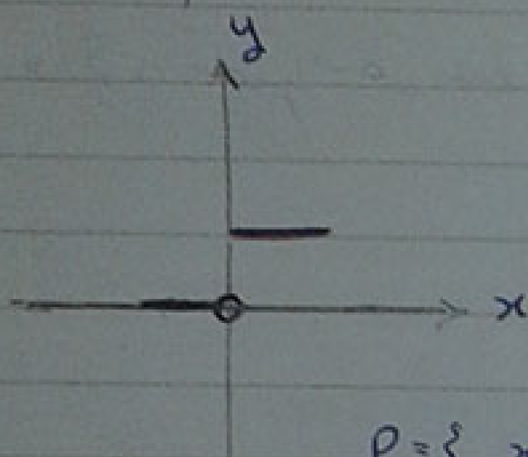
تمرين: بيّن أن التكامل $\int_{-1}^{1} f\,dg$ غير موجود بالرغم من وجود التكاملين

$$\int_{0}^{1} f\,dg \quad , \quad \int_{-1}^{0} f\,dg$$



علماً أن

$$f(x)=\begin{cases} 0 \; ; & -1 \le x \le 0 \\ 1 \; ; & 0 < x \le 1 \end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases} 0 \; ; & -1 \le x < 0 \\ 1 \; ; & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

الحل:

لتكن P تجزئة $P=\{x_0=-1 < \dots < x_n=0\}$

$$\int_{-1}^{0} f\,dg = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \underbrace{\Delta g_k}_{g(x_k)-g(x_{k-1})}$$

$$\Delta x = \max_{1\le k\le n}(\Delta g_k) \quad , \quad t_k \in [-1,0]$$

$$\int_{0}^{1} f\,dg = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \underbrace{[g(x_k)-g(x_{k-1})]}_{1-1 \text{ دوماً}} = 0$$

بينما: $\int_{-1}^{1} f\,dg$ غير موجود لأن:

$$P=\{x_0=0 < \overset{t_1}{x_1} < \overset{t_2}{x_2} < \dots < x_n=1\}$$

$$S(f,g,f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

$$= f(t_1)\cdot[g(x_1)-g(x_0)] + f(t_2)[g(x_2)-g(x_1)] + \dots + f(t_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] + \dots$$

$$\dots + f(t_{i+1})\left[\underbrace{g(x_i+1) - g(x_i)}_{1-0}\right] + \dots$$

$$\dots + f(t_n)\cdot\left[g(x_n) - g(x_n - 1)\right]$$

نلاحظ عندما تكون $x \in]x_{i-1}, x_i[$ فإن قيمة x_i هي واحد عندما x_i تكون بعد الصفر بالتجزئة P.

وتكون قيمتها صفر عندما تكون x_i قبل الصفر.

$$S(f, g, P) = f(t_i) = \begin{cases} 0 & t_i \leq 0 \\ 1 & t_i > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} S(f, g, P) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

وبالتالي النهاية غير موجودة اي لا يوجد قيمة محددة للتكامل $\int_{-1}^{1} f\,dg$

وهذا يدل على انه غير موجود.

انتهت المحاضرة...