المحاضرة الثالثة عشر

٢٠/٤/٢٠١٥

نظرية التقدير – التقدير النقطي

إن التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X عادةً يتبع وسطاء وعندما تكون هذه الوسطاء مجهولة نلجأ لتقديرها اعتماداً على عينة عشوائية حجمها n لـ X فإذا كان θ وسيطاً مجهولاً لتوزيع ما فإننا نقوم بتقدير θ بواسطة دالة مثل $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ وقيمة t ولتكن t مقداراً لـ θ ونرمز لمقدّر θ بـ $\hat{\theta}$.

طرائق التقدير:

١- طريقة العزوم في التقدير النقطي: تقصد هذه الطريقة على مطابقة عزوم العينة والتي تتبع نقط لعناصر العينة مع عزوم المتغير العشوائي والتي هي دوال في الوسطاء المجهولة.

مثلاً ليكن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً وسطاؤه $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ مجهولة فإننا نكتب k معادلة على الشكل:

$$m_r = M_r \quad ; \quad r = 1, 2, \dots, k$$

حيث k يمثل عدد الوسطاء المجهولة وبالحل المشترك لجملة المعادلات نحصل على المقدّرات $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ حيث

$$m_r = E(X^r) \quad , M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

تمرين [1]:

إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع البواسوني بوسيط (λ) أوجد بطريقة العزوم مقدّراً للوسيط (λ)

الحل: بما أن $X \sim pos(\lambda)$ فإن

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ووجدنا أن

$$m_1 = E(X) = \lambda$$

أي أن متوسط العينة للمتغير العشوائي يساوي وسيطه ولكن لدينا أيضاً:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

وهو العزم الأول للعينة وبالمساواة بين العزمين:

$$m_1 = M_1 \Rightarrow \lambda = \bar{X}$$

أي أن $\hat{\lambda} = \bar{X}$ وهو مقدّر للوسيط (λ) في التوزيع البواسوني

تمرين [2] : ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ أوجد بطريقة العزوم مقدراً لـ μ, σ^2.

الحل : نعلم أنه $m_1 = E(X) = \mu$ وأنه

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$\Rightarrow m_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

ولكن عزوم العينة من المرتبة الأولى والثانية هي

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \quad , \quad M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

وبمساواة العزوم المتناظرة مع بعضها نجد :

$$m_1 = M_1 \Rightarrow \mu = \bar{X} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$$ (وهو مقدر للوسيط μ)

$$m_2 = M_2 \Rightarrow \mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \quad --(*)$$

وهو مقدر للوسيط σ^2.

إن $(*)$ صحيحة لأنه :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2 X_i \bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}^2 + \frac{1}{n} \cdot n\bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

أي بالفعل نجد أنه :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

طريقة الاحتمالية العظمى في التقدير: وتعد من إحدى الطرائق الاحتمالية وأهمها في التقدير وقد جاء بها العالم الإنكليزي (Flisher) وتتم كما يلي:
لنفترض وسيط مجهول θ ولنفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X دالة كثافته $f_X(x)$ عندئذ تكون الدالة $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ والتي عندها تبلغ دالة الاحتمال المشترك.

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

قيمتها العظمى مقدّر للوسيط θ وتكون قيم θ حلاً مشتركاً لجملة المعادلات:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0 \quad , \quad \frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2} < 0$$

وفي الحالة العامة عندما تكون $f_X(x)$ تابعة لعدة وسطاء $\theta_1, \dots, \theta_k$ فإن المقدرات $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ هي إحصاء العينة التي قيمها حلول لجملة المعادلات:

$$\frac{dL}{d\theta_1} = 0, \frac{dL}{d\theta_2} = 0, \dots, \frac{dL}{d\theta_k} = 0$$

و

$$\frac{d^2L}{d\theta_1^2} < 0, \frac{d^2L}{d\theta_2^2} < 0, \dots, \frac{d^2L}{d\theta_k^2} < 0$$

حيث أن $L = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. أو نحل جملة المعادلات

$$\frac{dK}{d\theta_1} = 0, \frac{dK}{d\theta_2} = 0, \dots, \frac{dK}{d\theta_k} = 0$$

و

$$\frac{d^2k}{d\theta_1^2} < 0, \frac{d^2k}{d\theta_2^2} < 0, \dots, \frac{d^2k}{d\theta_k^2} < 0$$

حيث أن:

$$K = K(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \ln(L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k))$$

تمرين: ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، وإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X فأوجد مقدراً لـ μ ومقدراً لـ σ^2 بطريقة الاحتمالية العظمى.

الحل

$$L(\theta_1, \theta_2) = L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right]$$

$$L(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)}$$

$$\Rightarrow K(\mu, \sigma^2) = \ln\left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)}\right)$$

$$\Rightarrow K(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

وباشتقاق الدالة $K(\mu, \sigma^2)$ جزئياً بالنسبة للوسيطين μ، σ^2 نجد:

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$$

وللتأكد نتحقق أن

أي $\frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2} < 0$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

وبالتالي فإن $\hat{\mu} = \overline{X}$ هو مقدر لـ μ

$$\frac{\partial k}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\,\frac{2\pi}{\pi\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}\left(\frac{-1}{\sigma^4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \frac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

$$\Rightarrow -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

وللتأكد نتحقق أن

أي $\frac{\partial^2 k}{\partial(\sigma^2)^2} < 0$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{-n(+2\sigma^4) - (4\sigma^2)(-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)}{4\sigma^8} \overset{?}{<} 0$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{-n}{2\sigma^4} - \frac{(-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)}{\sigma^6}$$

ولكن $-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$ وبالتالي

$$\frac{\partial k}{\partial(\sigma^2)^2} = -\frac{n}{2\sigma^4} < 0$$

ومنه $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ هو مقدر لـ σ^2

انتهت المحاضرة الثالثة عشر