نمذجة رياضية

المحاضرة الثانية عشرة

٢٠/٤/٢٠١٥

البرمجة اللاخطية

مقدمة :

- أجريت في السنوات الأخيرة بحوث كثيرة تتناول حلولاً لمسائل البرمجة اللاخطية حيث أنه يوجد عائق رئيسي يعترض دراسة البرمجة اللاخطية، وهو التشكيلة الواسعة من التقنيات المطبقة حالياً في معالجة المسائل الخاصة بالبرمجة اللاخطية
- حيث تم اقتراح العديد من الإجراءات الخوارزمية لحل مسائل البرمجة اللاخطية، ولكن مجموعة قليلة منها أثبتت عملية أنها مفيدة في التعامل مع مشاكل واقعية.
- إن بعضاً من أنجح التقنيات تتناول تقريبات معينة وتستخدم مسائل برمجة خطية فرعية، وفيما يلي سنتعرف على الأسس والمبادئ المهمة للبرمجة اللاخطية
- وسنشرح عدة خوارزميات مهمة مستخدمة في حل مسائل البرمجة اللاخطية.

حيث أن الخوارزميات التي سنستعرضها تم اختيارها للأسباب التالية :

1) استخدامها الشائع من الناحية العملية وحصولها على نسبة نجاح مرتفعة.
2) كل خوارزمية منتقاة توضح منهجاً أساسياً فيما يتعلق بحل مسائل البرمجة اللاخطية.
3) بُرمجت جميعها من أجل حواسيب رقمية.

تعريف المسألة: تعرف المسألة ببرنامج رياضي مُعمّم :

أوجد القيمة الصغرى للتابع : $f(x) \longrightarrow Min$

حيث $x \in E^n$ مع مراعاة القيود :

$$H_j(x) = 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$G_k(x) \leq 0 \quad ; \quad k = \overline{1,m}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

/ /

هنا نقدم التعاريف الآتية :

- في المسألة السابقة لدينا n متحول قرار

n قيد مساواة

m قيد متراجحات .

- نعلم أنه إذا كان تابع الهدف وتوابع القيود خطية تحصل مسألة برمجة خطية وهذا ما درسناه في المحاضرات السابقة .

أما إذا كان تابع الهدف أو القيود تحوي توابع لاخطية فإن المسألة تصبح مسألة برمجة لاخطية .

- إن قيود عدم السلبية مشمولة ضمناً ضمن قيود المتراجحات .

ملاحظة: يمكن التعبير عن كل البرامج الرياضية بالشكل السابق .

- إن أي شعاع x يحقق مجموعة الـ n قيد مساواة والـ m قيد متراجحات يدعى حلاً مقبولاً أو حلاً نافذاً .

- ندعو أية مجموعة خاصة من المتحولات التي تعطي قيمة أصغرية لـ $f(x)$ شعاع حل أمثل نرمز له بالرمز x^* ، وهو ليس وحيداً بالضرورة حيث أن العديد من مسائل البرمجة اللاخطية لها عدة أشعة حل تؤدي إلى نفس القيمة الأصغرية لـ $f(x)$.

- وإن القرار بأن مسألة برمجة لاخطية تملك أو لا تملك حلاً أمثلاً يتعلق بكون أو عدم كون المسألة محددة بالنسبة لمتحولات الحل الخاصة بها .

- إن تعيين ما إذا كان هناك حل أمثل موجود لمسألة برمجة لاخطية محدودة هو أمر يتعلق بتابع الهدف ومجموعة القيود .

/ /

التوابع المتزايدة والمتناقصة :

* لتكن لدينا مجموعة النقاط : $x_1 , x_2 , ... , x_n$

حيث : $x_1 < x_2 < ...... < x_n$

إذا كان : $f(x_1) < f(x_2) < ...... < f(x_n)$

عندها نقول إن التابع متزايد تماماً :

* أما إذا كان من أجل : $x_1 < x_2 < ...... < x_n$

فإن : $f(x_1) > f(x_2) > ...... > f(x_n)$

عندها نقول إن التابع متناقص تماماً .

* أما إذا كان من أجل : $x_1 < x_2 < ...... < x_n$

فإن : $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$

عندها نقول إن التابع متزايد .

* وإذا كان من أجل : $x_1 < x_2 < ...... < x_n$

فإن : $f(x_n) \geq f(x_{n+1})$

عندها نقول إن التابع متناقص .

- إن تزايد وتناقص التابع يحدد لنا فيما إذا كان التابع أحادي النمط أو متعدد الأنماط :

المقصود بالتابع أحادي النمط : إذا كان التابع $f(x)$ يتزايد (يتناقص) تماماً ضمن مجال معين إلى قيمة معينة ثم يتناقص (يتزايد) عندها نقول إن هذا التابع أحادي النمط وبالتالي يكون للتابع قمة واحدة (واد واحد)

المقصود بالتابع متعدد الأنماط : إذا كان للتابع أكثر من قمة وأكثر من واد ضمن مجال معين فيدعى هذا التابع تابعاً متعدد الأنماط .

/ /

النقطة السنامية (المحلية):

تكون مقابلة لحل أمثل أي ضمن مجال معين حول هذه النقطة، مع ملاحظة أنها قد تكون أعلى من نقاط أخرى ضمن فضاء الحلول بأكمله.

وبما أنه من الممكن وجود العديد من هذه النقاط خلال صياغة برمجة لاخطية عامة فإن هذه النقاط تدعى نقاطاً مستقرة أو نقاط صغرى محلية.

ملاحظة (١):

يمكن أن تكون النقاط مستقرة عند نهاية صغرى محلية أو عند نقطة انعطاف أو عند نهاية عظمى، حيث يدعى أفضل حل أمثل النهاية الصغرى الشمولية.

ملاحظة (٢):

تعطي معظم خوارزميات البرمجة اللاخطية حلولاً هي نهايات صغرى محلية، والسبب الأساسي لذلك هو الإجراءات الخوارزمية التي تعتمد على الخواص المحلية لمسألة برمجة لاخطية.

وعندما لا تكون النهاية صغرى فيجب اختبار حلول أصغرية محلية متناوبة لتعيين الحل الأفضل.

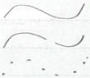
مع ملاحظة أن العديد من المسائل الواقعية تملك فقط نهاية صغرى شمولية.

ملاحظة (٣):

إن فهم المسألة أو إجراءات البدء يساعد في إيجاد النهايات الصغرى الشمولية وفي حالات معينة يكون أي حل مميز كحلّ أمثل محلي في الواقع هو حل أمثل شمولي.

تصنيفات التوابع:

تصنف التوابع وفق ما يلي:



* - توابع مستمرة
- توابع غير مستمرة (متقطعة)
- توابع منقطعة

* التوابع المحدبة والتوابع المقعرة:

تعريف التابع المحدب: يكون التابع $f(x)$ محدباً على مجال تعريفه إذا كان لأجل أية نقطتين x_1, x_2 في فضاء بعده n تتحقق المتراجحة التالية:

$$f\left[(1-\theta)x_1 + \theta x_2\right] \leq (1-\theta)\, f(x_1) + \theta\, f(x_2)$$

حيث $0 \leq \theta \leq 1$

تعريف التابع المقعر: يعرف التابع المقعر بشكل مشابه ولكن بإشارة تراجح معكوسة.

المعنى الهندسي للتعريف السابق:

إذا كان تابع ما محدب (مقعر) ورسم خط بياني بين نقطتين على سطحه فإن الجزء من الخط الذي يصل هاتين النقطتين سيتوضع بشكل كامل إلى أسفل (أعلى) ذلك التابع.

وهنا نقدم الحقائق التالية:

1- لا يتعلق تعريف تابع محدب (مقعر) بكون التابع مستمراً أو غير مستمر.

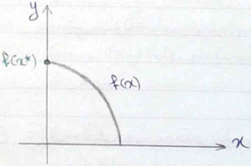
2- يمكن أن يكون تابع ما مقعراً في منطقة ومحدباً في أخرى.

3- التابع الخطي محدب ومقعر معاً.

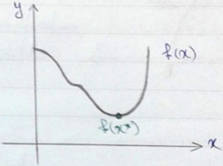
تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحل المثالي :

١) حد أعظمي أو حد أصغري - غير مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف فقط ، وكان هذا التابع محدباً (مقعراً) فإن الحل الأمثل وحيد عند نقطة تقع داخل المنطقة النافذة حيث تنعدم عندها جميع المشتقات أو عند نقطة حدية



حل حدي لمسألة غير مقيدة
القيمة العظمى



حل داخلي لمسألة غير مقيدة
القيمة الصغرى

٢) إيجاد القيمة العظمى - مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود ، فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة كل من التابع ومجموعة القيود .

فإذا كان تابع الهدف مقعراً ، ومجموعة القيود تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسألة ، وبالتالي فإن أية نقطة مستقرة يجب أن تكون حلاً أعظمياً شمولياً .

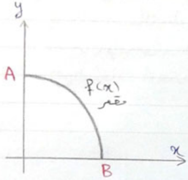
٣) إيجاد القيمة الصغرى - مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود .
وكان تابع الهدف محدباً ومجموعة القيود تشكل منطقة محدبة ، فإن أية نقطة مستقرة تكون حلاً أصغرياً شمولياً .

/ /

٤) إيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر أو محدب :

إذا كنا نقوم بإيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر أو محدب فإن الحل الأمثل سيوجد عند إحدى النقاط الحدية لمجموعة القيود .



فمثلاً: إيجاد القيمة الأصغرية للتابع $f(x)$ المقعر المرسوم

هنا نحتاج لاختبار النقطتين A, B

وتكمن المشكلة بأنه في معظم مسائل البرمجة اللاخطية لاسيما الصيغ الواقعية قد تكون مجموعة نقاط الحل كبيرة جداً .

هام ٥) التابع الخطي محدب ومقعر بنفس الوقت :

يشكل التابع الخطي فئة من مسائل الأمثلية إجمالاً .

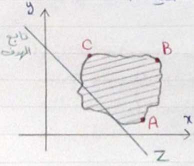
وحسب تعريف التابع المحدب والتابع المقعر فإن التابع الخطي محدب ومقعر معاً .

لذا إذا كان فضاء الحل محدباً يمكن إيجاد الحل عند الحدود .

٦) مناطق غير محدبة :

إذا شكلت مجموعة القيود فضاء حلول غير محدب عندها يمكن لأي إجراء خوارزمي يعتمد على الخواص المحلية لمسألة البرمجة اللاخطية أن ينتج نقطة مستقرة ، وقد لا تكون أعظمية شمولية ، ولا أصغرية شمولية .

وهذه الملاحظة صحيحة حتى لو كان تابع الهدف ذو طبيعة خطية .



مثلاً: بفرض أن النقاط A, B, C هي حدود مثلى محلية فإنه لإيجاد القيمة العظمى لـ Z ، نجد أن B نقطة شمولية .

المصفوفات الصغرى الأساسية:

إذا كانت المصفوفة المربعة Q ذات الأبعاد $n \times n$.
فإن المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة k هي مصفوفة ذات أبعاد $k \times k$
نحصل عليها بإهمال أي $n-k$ سطر والأعمدة المقابلة لها في المصفوفة Q

مثال:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 1 هي أساساً العناصر القطرية
أما المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 2 فهي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 3 هي Q نفسها.

تعريف: نرمز للمصفوفة الصغرى الأساسية بالمعين الأساسي، حيث أنه لكل
مصفوفة مربعة من القياس $n \times n$ يوجد $2^n - 1$ معيناً أساسياً.

المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية:

نحصل عليها من المرتبة k للمصفوفة $n \times n$ بإهمال الأسطر $n-k$ الأخيرة والأعمدة
المقابلة لها.

* في المثال السابق: تكون المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 1 هي $[1]$
حيث أهملنا السطرين الأخيرين والعمودين المقابلين لهما.
أما المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 2 هي: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

أما المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 3 هي Q نفسها

تعريف: يبلغ عدد المصفوفات الصغرى الأساسية الرئيسية في المصفوفة $n \times n$
n مصفوفة.

المصفوفة المعرفة الموجبة ـ المعرفة السالبة :

توجد بعض الاختبارات لتعيين المصفوفة فيما إذا كانت :
معرفة موجبة أو معرفة سالبة أو شبه معرفة موجبة أو شبه معرفة سالبة .

وهذه الاختبارات تطبق على المصفوفات المتناظرة فقط !
أما إذا كانت Q غير متناظرة فإننا نطبق الاختبار على المصفوفة $\frac{Q+Q'}{2}$
حيث Q' هي منقول Q .

* اختبار المصفوفة للمعرفة الموجبة :
1) يجب أن تكون كل العناصر القطرية موجبة تماماً .
2) يجب أن تكون كل المميزات الأساسية الرئيسيه موجبة تماماً .

* اختبار المصفوفة شبه المعرفة الموجبة :
1) يجب أن تكون جميع العناصر القطرية غير سالبة .
2) يجب أن تكون كل المميزات الأساسية الرئيسية غير سالبة .

ملاحظة: لإثبات أن مصفوفة Q معرفة سالبة (شبه معرفة سالبة)
يكفي أن نثبت أن المصفوفة (Q-) معرفة موجبة (شبه معرفة موجبة) .

نهاية المحاضرة الثانية عشرة