﴿ حـــــل تمـــارين ﴾

تمرين المحاضرة السادسة: أوجد الحل الأمثل الحقيقي ومن ثم الصحيح للبرنامج الخطي التالي

$$\max f = 8w_1 + 5w_2$$

$$3w_1 - w_2 \le 6 \quad , \quad w_1 + w_2 \le 8 \quad , \quad 0 \le w_1, w_2 \in \mathbb{Z}$$

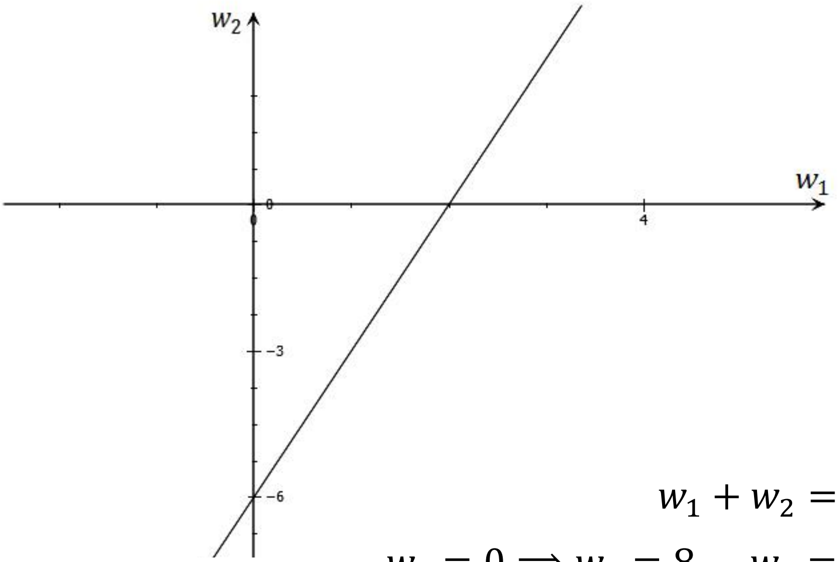
الحل: $3w_1 - w_2 \le 6 \ldots (1) \quad , \quad w_1 + w_2 \le 8 \ldots (2)$

ويوجد أيضاً شرط عدم السلبية أي $w_1, w_2 \ge 0$

والهدف هو إيجاد $\max f = 8w_1 + 5w_2$

ولنوجد أولاً منطقة الحلول: 1) من المتراجحة (1) نرسم المستقيم $3w_1 - w_2 = 6$

$$w_1 = 0 \Rightarrow w_2 = -6 \quad , \quad w_2 = 0 \Rightarrow 3w_1 = 6 \Rightarrow w_1 = 2$$



والمنطقة التي تحقق المطلوب هي

المنطقة الواقعة فوق المستقيم الموضح

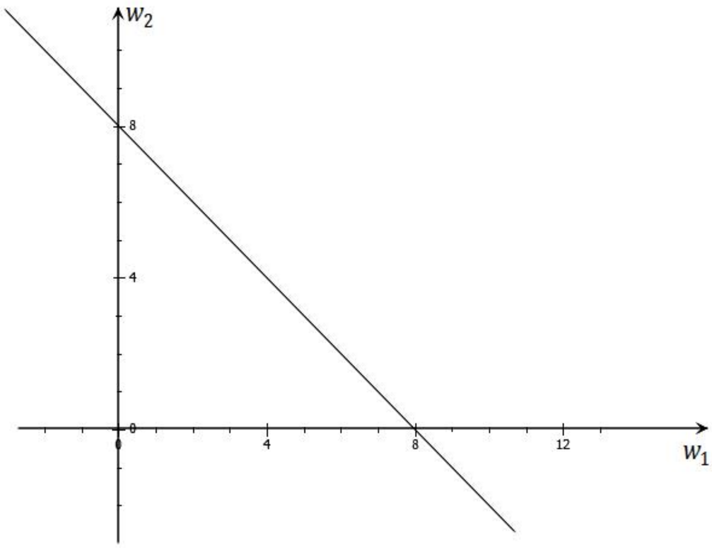
بالرسم والذي معادلته $3w_1 - w_2 = 6$

لأنَّ النقطة $(0,0)$

تحقق المتراجحة $3w_1 - w_2 \le 6$

2) من المتراجحة (2) نرسم المستقيم $w_1 + w_2 = 8$

$$w_1 = 0 \Rightarrow w_2 = 8 \quad , \quad w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = 4$$



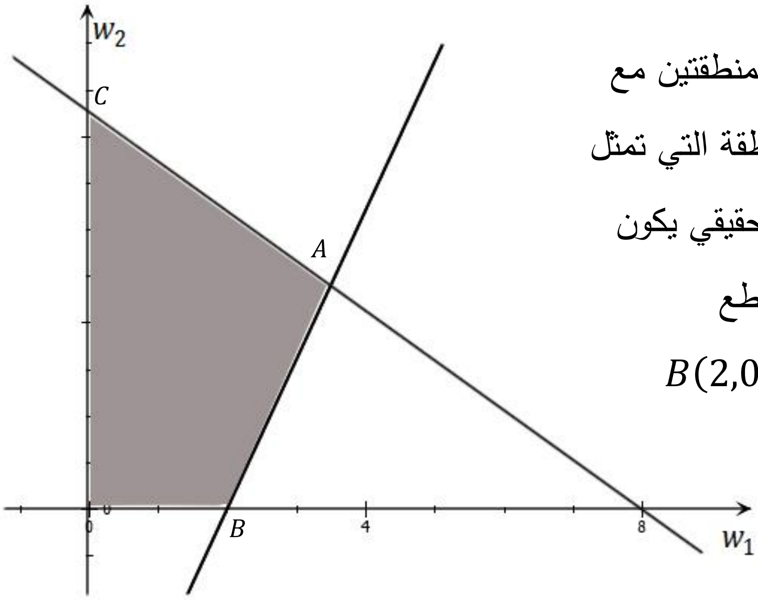
والمنطقة التي تحقق المطلوب هي

المنطقة الواقعة تحت المستقيم الموضح

بالرسم والذي معادلته $w_1 + w_2 = 8$

لأنَّ النقطة $(0,0)$ تحقق المتراجحة

$w_1 + w_2 \le 8$



ومنه منطقة الحلول ستكون تقاطع المنطقتين مع مراعاة أنَّ $w_1, w_2 \geq 0$ وهي المنطقة التي تمثل كل الحلول الحقيقية والحل الأمثل الحقيقي يكون إحدى نقاط التقاطع أي إما نقطة تقاطع المستقيمين A أو المبدأ أو النقطة $B(2,0)$ أو النقطة $C(0,8)$

ولنوجد إحداثيات A وذلك بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين

$$3w_1 - w_2 = 6$$
$$w_1 + w_2 = 8$$

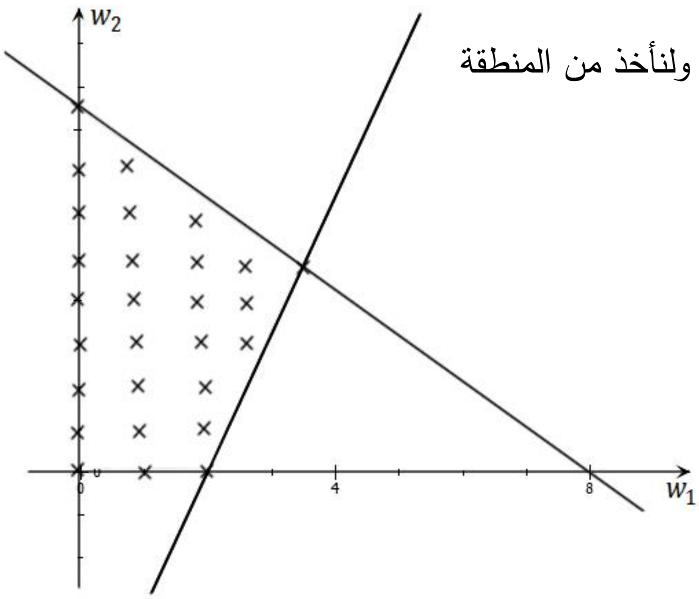
من المعادلة الثانية لدينا $w_2 = 8 - w_1$ نعوض في الأولى

$$3w_1 - 8 + w_1 = 6 \Longrightarrow 4w_1 = 14 \Longrightarrow w_1 = \frac{14}{4} = 3.5 \Longrightarrow x_2 = 4.5$$

ولنبحث عن الحل الأمثل الحقيقي

$$f(0,0) = 0 \qquad , \qquad f(2,0) = 8(2) + 5(0) = 16$$
$$f(0,8) = 8(0) + 5(8) = 40$$
$$f(3.5,4.5) = 8(3.5) + 5(4.5) = 50.5$$

ومنه $\max f = 50.5$ أي الحل الأمثل الحقيقي هو $x_1 = 3.5 \;\; , \;\; x_2 = 4.5$ وقيمة دالة الهدف عندها تكون 50.5

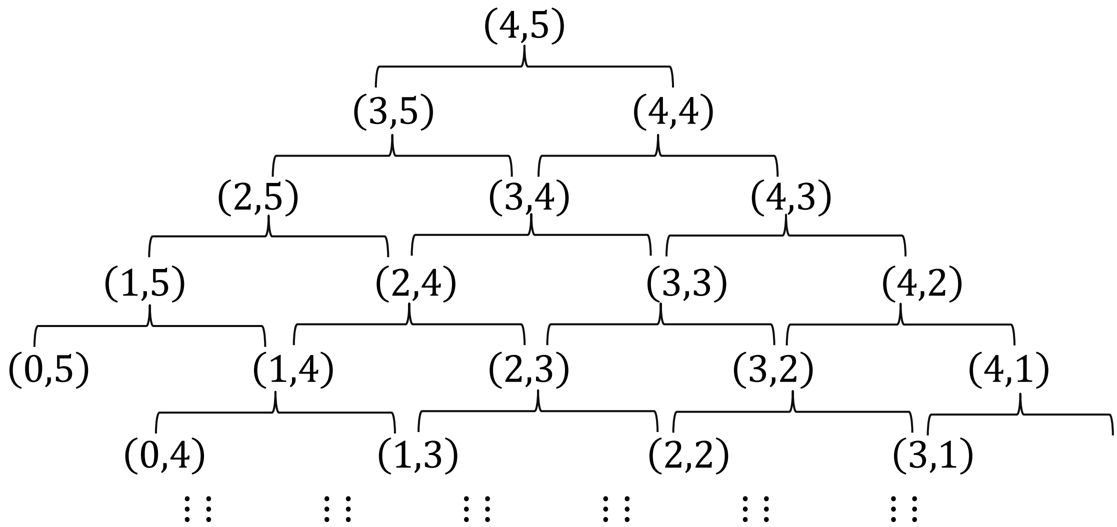


لكن هدفنا هو إيجاد الحل الأمثل الصحيح ولنأخذ من المنطقة كل الثنائيات الصحيحة والتي هي

$$(0,0), (0,1), (0,3), \cdots\cdots, (0,8)$$
$$(1,0), (1,1), \cdots\cdots, (1,7)$$
$$(2,0), (2,1), \cdots\cdots, (2,6)$$
$$(3,3), (3,4), (3,5)$$

(أي ثنائية تقع في منطقة الحلول تحقق المتراجحتين (1) و (2) معاً)

ولنوجد الحل الصحيح، نأخذ أكبر عدد صحيح أكبر أو يساوي الحل الحقيقي لكل مسقط من مساقط الثنائية (x_1, x_2) ففي مثالنا هذا الحل الحقيقي هو $(3.5,4.5)$ وبالتقريب سنأخذ الثنائية $(4,5)$ وننشأ الشجرة بالشكل التالي



الشجرة الناتجة تضم حلول صحيحة ومن ضمن هذه الحلول يوجد الحل الأمثل الصحيح المبحوث عنه وبما أنَّ دالة الهدف max نبدأ من أعلى الشجرة نختبر أولاً فيما إذا كانت الثنائية ضمن منطقة الحلول ومن ثم نحسب قيمتها، نلاحظ أنَّ $(4,5)$ ليست في منطقة الحلول لأنها ستخل أحد الشرطين $3w_1 - w_2 \leq 6$ ، $w_1 + w_2 \leq 8$ ننتقل للسطر الثاني فنجد أنَّ $(3,5)$ تنتمي لمنطقة الحلول ولنوجد القيمة عندها $f(3,5) = 8(3) + 5(5) = 49$ وبما أنَّ دالة الهدف max وموجبة فكل ثنائية بالشجرة ناتجة عن تفرع لـ $(3,5)$ ستكون قيمتها في دالة الهدف أقل منها عند $(3,5)$ لذلك لا نختبر كل الحلول الناتجة عنها.

وفي السطر الثاني أيضاً نجد أنَّ $(4,4)$ لا تنتمي لمنطقة الحلول ننظر في السطر الثالث ونأخذ فقط $(4,3)$ لأنَّ $(3,4)$ ناتجة عن $(3,5)$ لا نأخذها، إنَّ $(4,4)$ لا تنتمي لمنطقة الحلول نأخذ $(4,3)$ نلاحظ أنها أيضاً لا تنتمي لمنطقة الحلول وهكذا حتى $(4,0)$ لن تنتمي لمنطقة الحلول ومنه الحل الأمثل الصحيح هو $x_1 = 3, x_2 = 5$ وقيمة دالة الهدف هي 370.

حـــل تماريـــن المحاضـــرة الخامســـة:

مسألة[1]: إذا كان $\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{مرة}}$ عدد أولي فإنَّ k سيكون عدد أولي، وبين أنَّ العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

الحل: ليكن $\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{مرة}} = p$ بحيث p عدد أولي، نفرض جدلاً أنَّ k ليس أولي عندئذٍ يوجد عددين صحيحين موجبين أكبر تماماً من الواحد وليكونا n,m بحيث $k = n \times m$ ومنه

$$\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{مرة}} = \underbrace{11\ldots1}_{(n\times m)\ \text{مرة}} = \underbrace{11\ldots1}_{m\ \text{مرة}} \times \underbrace{1\ \underbrace{00\ldots0}_{(m-1)\ \text{مرة}}\ 100\ldots01\ldots100\ldots01}_{(n-1)\ \text{مرة}}$$

لكن $\underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{مرة}} = p$ عدد أولي أي $p = \underbrace{11\ldots1}_{m\ \text{مرة}} \times \underbrace{1\ \underbrace{00\ldots0}_{(m-1)\ \text{مرة}}\ 100\ldots01\ldots100\ldots01}_{(n-1)\ \text{مرة}}$ وهذا

يناقض كون p عدد أولي (لا يمكن كتابته على شكل جداء عددين) ومنه الفرض الجدلي خاطئ و k سيكون عدد أولي.

ولنبيّن أنَّ العكس غير صحيح بالضرورة من خلال المثال المعاكس التالي: نلاحظ أنه من أجل العدد الأولي $k = 3$ سنحصل على العدد 111 لكنه لي أولي لأنَّ $111 = 3 \times 37$.

مسألة[2]: برهن أنَّ $\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{مرة}}$ يقبل القسمة على 41 إذا وفقط إذا كان n يقبل القسمة على 5.

الحل: ليكن العدد $\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{مرة}}$ يقبل القسمة على 41، نفرض جدلاً أنَّ n لا يقبل القسمة على 5 عندئذٍ

$$n = 5k + r \quad ; \quad r \in \{1,2,3,4\}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{مرة}} = \underbrace{11\ldots1}_{(5k+r)\ \text{مرة}} = \underbrace{11\ldots1}_{5k\ \text{مرة}}\underbrace{00\ldots0}_{r\ \text{مرة}} + \underbrace{11\ldots1}_{r\ \text{مرة}}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{5k\ \text{مرة}} = 11111 \times \underbrace{10000100001\ldots\ldots100001}_{(k-1)\ \text{مرة}}$$

ونلاحظ أنَّ $11111 = 41 \times 271$ ومنه $\underbrace{11\ldots1}_{5k\ \text{مرة}}$ يقبل القسمة على 41 أصبح لدينا

$$\underbrace{\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{مرة}}}_{\text{يقبل القسمة على } 41} = \underbrace{\underbrace{11\ldots1}_{5k\ \text{مرة}}\underbrace{00\ldots0}_{r\ \text{مرة}}}_{\text{يقبل القسمة على } 41} + \underbrace{11\ldots1}_{r\ \text{مرة}}$$

وبالتالي نجد أنَّ $x=\underbrace{11\dots1}_{r \text{ مرة}}$ يقبل القسمة على 41 بحيث $r\in\{1,2,3,4\}$

لكن عندما $r=1$ فإنَّ $x=1$ لا يقبل القسمة على 41 وكذلك عندما $r=2$ يكون $x=11$ وهو لا يقبل القسمة على 41 وأيضاً من أجل $r=3$ نحصل على $x=111$ ولا يقبل القسمة على 41 وأخير عندما $r=4$ فإنَّ $x=1111$ ولا يقبل القسمة على 41 أي أنَّ $r\notin\{1,2,3,4\}$ وهذا يناقض الفرض كون $r\in\{1,2,3,4\}$ وعليه يكون الفرض الجدلي خاطئ و n يقبل القسمة على 5.

<u>**ولنبرهن العكس**</u>

لدينا n يقبل القسمة على 5 أي يوجد عدد صحيح m بحيث $n=5m$ وبالتالي

$$\underbrace{11\dots1}_{n \text{ مرة}}=\underbrace{11\dots1}_{5m \text{ مرة}}=11111\times\underbrace{10000100001\dots100001}_{(m-1) \text{ مرة}}$$

لكن $11111=41\times271$ أي يقبل القسمة على 41 وبذلك يكون $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ مرة}}$ يقبل القسمة على41 .

انتهت المحاضرة ،،، عامر أبوبكر