27 / 4 / 2015 # المحاضرة الحادية عشرة الاثنين :

**ملاحظة :** ورد في المحاضرة السادسة مثال طلب منا ايجاد النموذج المرافق ثم اعطينا حل مثالي للنموذج الاصلي هو $x_1'=16$ , $x_2'=8$ يقابلها $Z=2240$ وطلب ايجاد الحل المثالي للنموذج المرافق ؟

يجب التأكد من صحة الفرضيات ، لذلك مطلوب منا حل النموذج بطريقة السمبلكس وايجاد $x_1'$ , $x_2'$ (الحل الامثل) . ثم ايجاد الحل الامثل للنموذج المرافق ...

# تحليل الحساسية :

**تحليل حساسية الحل المثالي :** تنبع اهمية تحليل حساسية الحل المثالي الذي نحصل عليه نتيجة تطبيق خوارزمية السمبلكس او غيرها من أن ذلك الحل المثالي ينشأ في ظروف وشروط معينة وهنا نطرح السؤال الآتي : ماذا سيحدث بالحل المثالي اذا تغير بعض ظروف المسألة وهل سيحافظ على نفسه اذا تغيرت الظروف أو الشروط تغيراً طفيفاً وما الحلول المسموح بها لذلك التغير دون ان تؤثر على الحل المثالي المعروض

للإجابة على الاسئلة السابقة لابد من تحديد مصادر التغير وانواعها على سبيل المثال نذكر :

1 - تغير احد أو بعض أو كل اسعار المنتجات أو التكاليف التي تدخل في تابع الهدف . اي حدوث تغير في الامثال $P_j$ في تابع الهدف .

2 - تغير المعاملات الفنية الداخلة في شروط المسألة الخطية لاسباب تكنولوجية اي تغير في مصفوفة الامثال $a_{ij}$ في متراجحات أو معادلات الشروط الخطية .

3 - تغير كميات العرض لبعض المواد المتوفرة في المخازن أو المحددة في الميزانية اي تغير في الثوابت العددية $b_i$

4 - ظهور عوامل أو منتجات جديدة لم تكن مدرجة في المسألة السابقة .

5 - ضرورة إضافة شرط أو شروط جديدة على قيود المسألة المدروسة لاسباب تقتضيها شروط الانتاج أو ظروف التسويق .

* امام ذلك لابد من دراسة وتحليل الحساسية المتعلقة بهذه التغيرات أو اعادة حل المسألة من جديد عند كل تغير يطرأ على اي عنصر من عناصر المسألة المدروسة

**أولاً : دراسة تغير الحساسية حسابياً :**

نقوم بدراسة تحليل الحساسية حسابياً للحالات الآتية :

1 - حالة تغير احد أو بعض الامثال $P_j$ في تابع الحلول (ومنطقة الحلول ثابتة) .

2 - حالة تغير احد قيم الثوابت العددية في الطرف الايمن للمتراجحات أو المعادلات .

3 - علاقة اسعار الظل في تحليل الحساسية .

4 - " المصفوفة الارتكازية في تحليل الحساسية .

ولتفسير وتوضيح معنى تحليل الحساسية سوف نقدم المثال التالي :

## مثال :

تريد احدى الشركات وضع خطة مثالية لانتاج نوعين $A_1, A_2$ من المنتجات يحققان لها عند تسويقه كل واحدة منها ربحاً صافياً قدره 5 و 9 ل.س على الترتيب تستخدم ثلاثة انواع من المواد الاولية $B_1, B_2, B_3$ وهي متوفرة في المخازن لديها 30000 , 40000 , 12000 على الترتيب

اما مايلزمنا من تلك المواد لانتاج كل واحدة من المنتجات $A_1, A_2$ معطاة في الجدول التالي :

| المنتجات / المواد الاولية | $A_1$ | $A_2$ | الكميات المتوفرة |
|---|---|---|---|
| $B_1$ | 2 | 6 | 24000 |
| $B_2$ | 8 | 4 | 40000 |
| $B_3$ | 5 | 6 | 30000 |
| مقدار الربح | 5 | 9 | |

المطلوب : 1- صياغة النموذج الرياضي الذي تحقق من خلاله الشركة ربحاً اعظمياً .

2- استخدام طريقة الحل البياني لايجاد الكمية المنتجة من $A_1, A_2$

3- تحليل الحساسية في حال تغير احد معاملات تابع الهدف (ومنطقة الحلول ثابتة)

الحل :

1 - نفرض $x_1$ الكمية المنتجة من المنتج $A_1$ .

و $x_2$ الكمية المنتجة من المنتج $A_2$ .

عندئذ مقدار الربح هو:

$$Z = 5x_1 + 9x_2$$

ضمن الشروط : (شروط الكميات)

$$2x_1 + 6x_2 \leq 24000$$

$$8x_1 + 4x_2 \leq 40000$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30000$$

/ /

٤ وعليه يكون النموذج الرياضي بالشكل: اوجد

$$\max Z = 5x_1 + 9x_2$$

ضمن الشروط:

$$2x_1 + 6x_2 \leq 24000$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 40000$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq 30000$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

2 - نعتمد المحور الافقي هو $x_1$ و المحور الشاقولي هو $x_2$ . ونقوم برسم المستقيمات التالية : (اي نمثل القيود بمستقيمات) : $x_1 , x_2 \geq 0$

$\boxed{1}$ $2x_1 + 6x_2 = 24000$

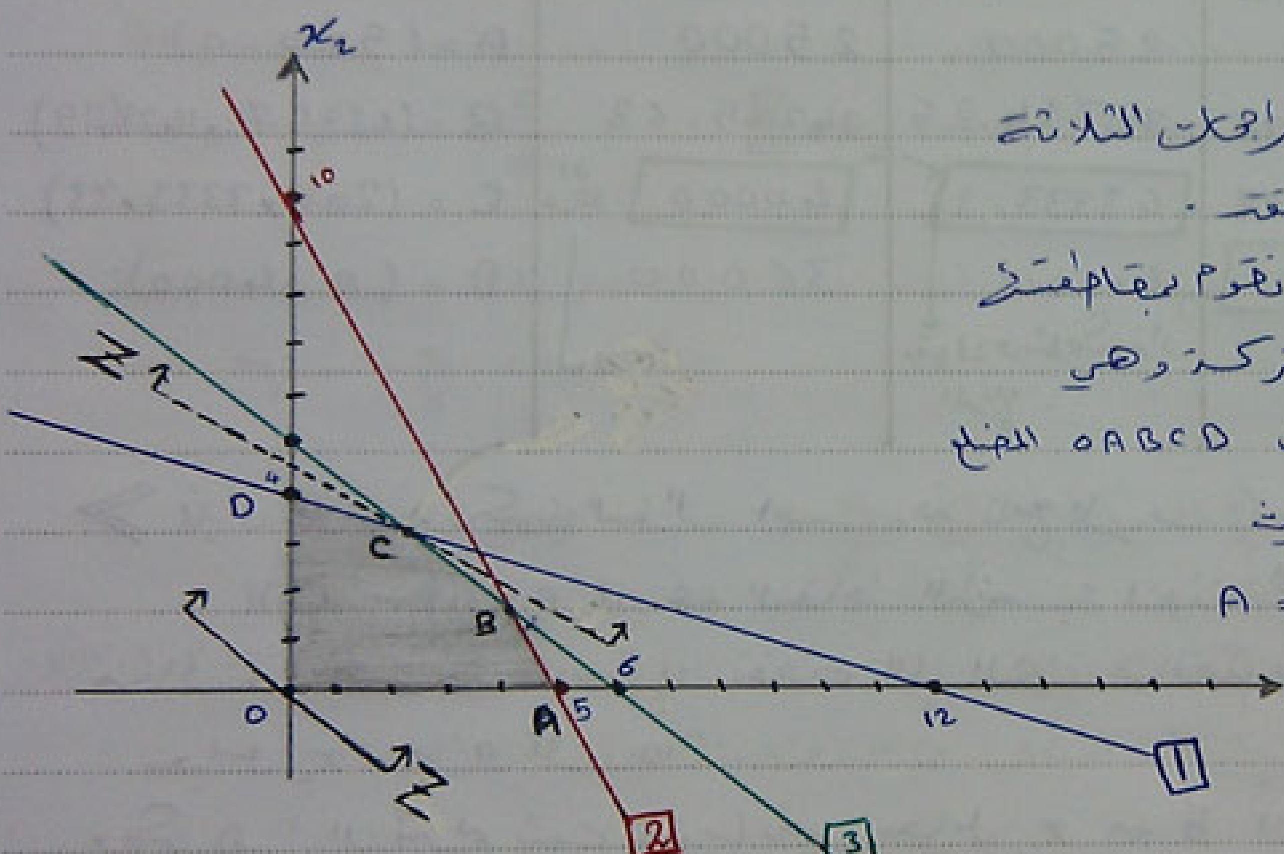
| 12000 | 0 | $x_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 4000 | $x_2$ |

$\boxed{2}$ $8x_1 + 4x_2 = 40000$

| 5000 | 0 | $x_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 10000 | $x_2$ |

$\boxed{3}$ $5x_1 + 6x_2 = 30000$

| 6000 | 0 | $x_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 5000 | $x_2$ |




نقوم باختبار منطقة الحلول لكل من المتراجحات الثلاثة وذلك باختيار النقطة (0,0) للتحقق. وبعد اختبار مناطق الحلول الثلاثة نقوم بتقاطعها لكي نحصل على منطقة الحلول المشتركة وهي مبينة في الشكل المجاور حيث OABCD المضلع يمثل منطقة الحلول المشتركة حيث $A = (5000 , 0)$ & $D = (0 , 4000)$

لايجاد احداثيات B و C نقوم بحل المشترك للمعادلتين المستقيمين الناتجة عن تقاطعهما كلاً من B و C :

بحل جملة المعادلتين
$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 40000 & \boxed{2} \\ 5x_1 + 6x_2 = 30000 & \boxed{3} \end{cases}$$
نحصل على النقطة B وهي: $B = (4285.714 , 1428.571)$

وبحل جملة المعادلتين
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 24000 & \boxed{1} \\ 5x_1 + 6x_2 = 30000 & \boxed{3} \end{cases}$$
نحصل على النقطة C وهي: $C = (2000 , 3333.33)$

وبالتالي اصبحت رؤوس مضلع منطقة الحلول معلومة .

نلاحظ ان C هي الحل الامثل عند حساب قيمة Z عند C فإنه يساوي 40000

اي ربح الشركة من جراء تطبيق هذه الخطة هو $Z(c)$

ومنه الحل المثالي هو $x_1' = 2000$ , $x_2' = 3333,33$

③ إن منطقة الحلول ثابتة وهي المضلع OABCD ،

الدراسة الأولى لتحليل الحساسية تمت عن طريق حساب قيمة تابع الهدف عند رؤوس منطقة الحلول ثم نقوم بإجراء تعديلات على أمثال تابع الهدف وحساب قيمة تابع الهدف المعدل عند رؤوس مضلع منطقة الحلول ثم نلاحظ تأثير هذا التغير على الربح. سوف نبين ذلك من خلال الجدول الآتي:

| | الوضع الأصلي $5x_1 + 9x_2$ | الوضع المعدل الأول $5x_1 + 10x_2$ | الوضع المعدل الثاني $3x_1 + 9x_2$ | الوضع المعدل الثالث $9x_1 + 9x_2$ |
|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A = (5000 , 0) | 25000 | 25000 | 15000 | 45000 |
| B = (4285.71 , 1428.57) | 34285,68 | 35714,25 | 25714,26 | $\boxed{51428,52}$ |
| C = (2000 , 3333.33) | الحل الأمثل $\boxed{40000}$ | $\boxed{43333,3}$ | 35999,97 | 47999,97 |
| D = (0 , 4000) | 36000 | 40000 | $\boxed{36000}$ | 36000 |
| | | بقي الحل الأمثل لكن زاد الربح. | | الزيادة الكبيرة التي أعطيناها لمثال تابع الهدف نقلتنا من نقطة حل مثالي الى نقطة حل مثالي آخر. |

≪ في الامتحان: يكون السؤال احسب قيم تابع الهدف في حال تغيرت أمثال تابع الهدف: (مثلاً من $P_1$ الى $P_2$). عند النقاط الرأسية لمنطقة الحلول. ≫

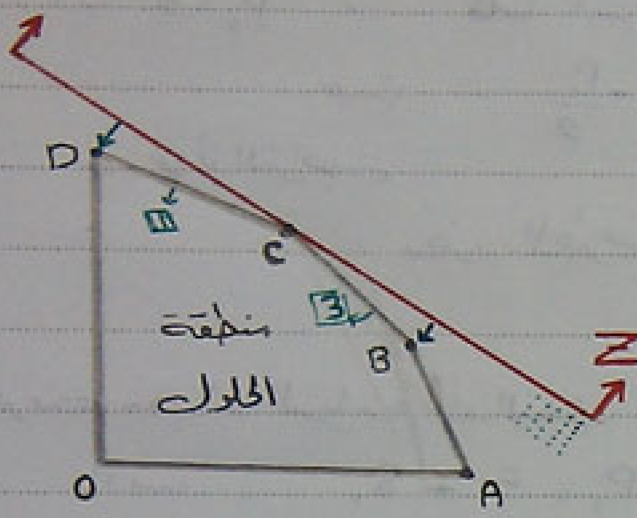
من الجدول السابق نلاحظ أن نقطة الحل المثالي حافظت على ثباتها في النقطة C رغم تغير معامل $x_2$ من 9 الى 10.

ولكن هذا الأمر يتغير عندما تغير معامل $x_1$ من 5 الى 3 حيث تحولت نقطة الحل الأمثل الى D ثم تحولت الى النقطة B عندما تغير معامل $x_1$ من 5 الى 9.

أي أن تغير معين أو محدد لمعاملات متحولات تابع الهدف يمكن أن لا يؤدي الى انتقال نقطة الحل المثالي من نقطة الرأسية الى نقطة أخرى مع أنه يؤثر على قيمة Z العددية.

والسؤال المطروح ما المجال المسموح به لتغير كل من معاملات متحولات تابع الهدف $P_j$ بحيث يبقى الحل المثالي محافظاً على نفسه

لدراسة وتحليل هذه الأمور نأخذ المثال السابق ونلاحظ أن مستقيم تابع الهدف المار من C (نقطة الحل المثالي).




≫ نلاحظ أن تابع الهدف محصور بين المستقيمين $\boxed{1}$ و $\boxed{3}$
أي أنه يمكن أن يدور في هذه المنطقة المحصور بها دون أن تتغير C ، بحيث أن أي تغير في معاملات تابع الهدف إما أن يدور لينطبق على المستقيم $\boxed{3}$
أو يدور وينطبق على المستقيم $\boxed{1}$.

وبالتالي تحرك التابع بهذا الشكل يعبر عن اختلاف ميله $m$ أي ميله محصور بين ميلي المستقيمين الأول والثالث ≫ ومنه:

$$m_3 \leq m \leq m_1$$

لنحسب ميل المستقيم الثالث من معادلته كما يلي: $5x_1 + 6x_2 = 30000$

$$\Longrightarrow m_3 = -\frac{5}{6} \qquad \left[\left[\, 6x_2 = -5x_1 + 30000 \Longrightarrow x_2 = \overset{m_3}{\left(-\frac{5}{6}\right)} x_1 + 5000 \,\right]\right]$$

حساب ميل المستقيم الأول من معادلته: $2x_1 + 6x_2 = 24000$

$$\Longrightarrow m_1 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

حالة المساواة في المتراجحة عندما ينطبق تابع الهدف على المستقيم الأول أو الثالث

$$\Longrightarrow \quad -\frac{5}{6} \leq m \leq -\frac{1}{3}$$

لذلك سنأخذ حالة $-\frac{5}{6} < m < -\frac{1}{3}$ لأن المساواة تعني المستقيم الأول والثالث

نشير إلى أن الوضعية الأصلية للحل المثالي في النقطة C حققت المتراجحة التالية:

$$-\frac{5}{6} < m < -\frac{1}{3}$$

حيث أن ميل تابع الهدف في وضعه الأصلي هو $-\frac{5}{9}$.

إن تابع الهدف يكتب بالشكل: $Z = P_1x_1 + P_2x_2$ وبالتالي $m = -\frac{P_1}{P_2}$

بما أن $m$ هو نسبة أمثال $x_1$ على أمثال $x_2$ مضروبة بـ $-1$ فإن هذه الأمثال تتغير باستقلالية.

فإن عملية تحليل الحساسية تقتضي أن نبحث عن حدود تغير كلاً من المعاملين $P_1$ و $P_2$ على حدى. وذلك ضمن الشروط المفروضة على $m$.

* من اجل تحديد حدود تغير المعامل $P_1$ نفرض ان $P_2$ ثابت ومعلوم وليكن مساوي لـ 9 .

اي $P_2 = 9$ . علماً ان التراجحة محققة $-\frac{5}{6} < m < -\frac{1}{3}$

حيث $m = -\frac{P_1}{P_2} = -\frac{P_1}{9}$

نعوض في التراجحة $-\frac{5}{6} < -\frac{P_1}{9} < \frac{1}{3}$

نضرب الطرفين بـ 9- فنجد :

$$3 < P_1 < 7.5$$

ولمعرفة مقدار الزيادة أو النقص للمعامل $P_1$ الذي لا يؤثر على مركبات الحل المثالي نفرض أن $P_1 = 5 + \delta_1$ حيث $\delta_1$ مقدار الزيادة ومنه يكون بالتعويض في التراجحة:

$$3 < 5 + \delta_1 < 7.5 \Rightarrow -2 < \delta_1 < 2.5$$

اي ان مجال التغير الممكن طرأ على $P_1$ امثال $x_1$ في Z .

وبذلك فإن حدود تغير معامل المتحول $x_1$ هي المجال المفتوح ]3, 7.5[

وذلك بشرط أن يبقى معامل المتحول $x_2$ ثابتاً ومساوياً لـ 9 .

حيث ان $P_1$ يمكن أن يزيد بمقدار 2.5 او ينقص بمقدار 2 وحدة نقدية دون أن يؤثر على مركبات الحل المثالي الاخير .

* بنفس الطريقة يمكن ايجاد حدود تغير المعامل $P_2$ وذلك بفرض ان $P_1$ ثابت ومعلوم $P_1 = 5$

وبالتالي :

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{P_2} < \frac{5}{6} \Longleftarrow -\frac{5}{6} < m = -\frac{5}{P_2} < -\frac{1}{3}$$

$\Longleftarrow 6 < P_2 < 15$ ومنه حدود تغير معامل $x_2$ هو المجال المفتوح ]6, 15[ .

لمعرفة مقدار الزيادة أو النقصان للمعامل $P_2$ نفرض : $P_2 = 9 + \delta_2$

نعوض في التراجحة $-3 < \delta_2 < 6 \Longleftarrow 6 < 9 + \delta_2 < 15$

اي ان $P_2$ يمكن أن يزيد بمقدار 6 وينقص بمقدار 3- وحدة نقدية دون أن يؤثر على مركبات الحل المثالي الاخير .

Finished Lecture....