التراص.

تعريف: لتكن A مجموعة غير خالية، ولنفرض $\{x_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية غير الخالية في A، نقول ان الأسرة $\{x_i\}_{i\in I}$ تحقق خاصة التقاطع المنتهي اذا كانت كل اسرة منتهية منها لها تقاطع.

مبرهنة/ ليكن (X, d) فضاء متري تام عندئذ كل متتالية متناقصة من الكرات المغلقة من (X, d) في الشكل

$$\dots \subset B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1$$

والتي متتالية أقطارها تسعى للصفر تحقق

$$\bigcap_{i\in I} B_i = \{a\}$$

البرهان:

لنفرض ان $\delta_n = \delta(B_n) \quad \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

لنفرض ان $x_n \quad \forall n$

هو مركز الكرة B_n

لناخذ المتتالية $\{x_n\}_{n\in N}$

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\; n_0 \in N \,,\; \forall n, m \geq n_0 \;;$$

$$d(x_n, x_m) < \delta_{n_0}$$

$$\lim d(x_n, x_m) = 0$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

وهذا يعني ان المتتالية $\{x_n\}_{n\in N}$ هي متتالية كوشي
وبما ان الفضاء X تام فإن $\{x_n\}$ متقاربة من النقطة a
فرضاً،
من جهة اخرى لدينا

$$d(a,x_n) \le d(a,x_m) + d(x_m,x_n)$$
$$< d(a,x_m) + \delta_{n_0}$$
$$d(a,x_n) < \varepsilon$$

ومنه فإن $\{a\} \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i \subset \{a\}$

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري و $\phi \neq F \subset X$ لنفرض ان $\{Y_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية غير الخالية في X. نقول ان الأسرة $\{Y_i\}_{i\in I}$ تشكل تغطية للمجموعة F إذا كان

$$F \subseteq \bigcup_{i\in I} Y_i$$

ونقول عن الغطاء $\{Y_i\}$ للمجموعة F إنها مفتوحة إذا كانت المجموعات Y_i مفتوحة $\forall i\in I$.

I

مبرهنة/ ليكن (X,d) فضاء متري، الشروط الآتية متكافئة

① كل أسرة من المجموعات المغلقة في X والتي تحقق خاصية التقاطع المنتهي تقاطعها غير خال (تقاطع عناصرها).

② كل متتالية من عناصر X تملك نقطة ملاصقة.

③ كل تغطية مفتوحة للمجموعة X تحوي تغطية منتهية لـ X.

البرهان:

١ ← ٢ لتكن $\{x_n\}_{n\in N}$ متتالية من عناصر X ، لنأخذ المجموعات التالية:

$$X_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$$
$$X_2 = \{x_2, x_3, \ldots\}$$
$$X_3 = \{x_3, x_4, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

نجد أن $\{X_n\}_{n\in N}$ أسرة من المجموعات الجزئية في X ، لنضع

$$F_n = cl(X_n) \qquad \forall n\in N$$

نحصل على أسرة من المجموعات المغلقة في X هي $\{F_n\}$

والتي تحقق خاصة التقاطع المنتهي، ومن الفرض

يكون $\bigcap_{n\in N} F_n \neq \phi$

ومنه توجد نقطة

$$a \in \bigcap F_n \subseteq F_1 = cl(X_1)$$

٢ ← ٣ بدون برهان (يعتمد على المتتاليات الجزئية)

٣ ← ١ لتكن $\{B_n\}_{n\in I}$ أسرة من المجموعات المغلقة

في X والتي تحقق خاصة التقاطع المنتهي

تقاطع كل عناصر هذه الأسرة $\neq \phi$ المطلوب إثبات

لنفرض جدلاً أن $\bigcap_{n\in I} B_n = \phi$

عندئذ

$$X = \Big(\bigcap_{n\in I} B_n\Big)^c = \bigcup_{n\in I} B_n^c$$ ← نأخذ المتمم للطرفين

وعليه

B_n^c مجموعة مفتوحة في X $\quad \forall n\in I$

وحسب الفرض توجد أسرة منتهية ولتكن

$$\{ B_{n_1}^c , B_{n_2}^c , \dots , B_{n_j}^c \}$$

بحيث

$$X = \bigcup_{i=1}^{j} B_{n_i}^c$$

نأخذ المتممة للطرفين

$$\Rightarrow \quad \phi = \left(\bigcup_{i=1}^{j} B_{n_i}^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{j} B_{n_i}$$

وهذا يناقض الفرض ومنه بأن $\bigcap_{n\in I} B_n \neq \phi$

تعريف: نقول عن المجموعة غير الخالية $K \neq \phi$ من الفضاء المتري (X,d) إنها متراصة إذا كانت لكل تغطية مفتوحة للمجموعة K توجد تغطية منتهية للمجموعة K

/مبرهنة/ في أي فضاء متري كل مجموعة منتهية هي مجموعة متراصة.

البرهان:

ليكن (X,d) فضاء متري و K مجموعة منتهية في X

لتكن $\{F_n\}_{n\in N}$ تغطية مفتوحة للمجموعة K عندئذ

$$K \subseteq \bigcup_{n\in N} F_n$$

لنفرض $K = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$

لأجل a_1 توجد F_{n_1} بحيث $a_1 \in F_{n_1}$

لأجل a_2 توجد F_{n_2} بحيث $a_2 \in F_{n_2}$

$\vdots$

لأجل a_t توجد F_{n_t} بحيث $a_t \in F_{n_t}$

ومنه فإن المجموعة

$$K = \bigcup_{i=1}^{t} \{a_i\} \subset \bigcup_{i=1}^{t} F_{n_i}$$

وهكذا نجد ان المجموعة K متراصة.

- بعض الخواص الأخرى للمجموعات المتراصة:

١/ مبرهنة/ في أي فضاء متري اجتماع عدد منتهي من المجموعات المتراصة هو مجموعة متراصة:

البرهان:

ليكن (X, d) فضاء متري ، ولتكن K_1, K_2 مجموعتين متراصتين في X

وإن $K = K_1 \cup K_2$

ولتكن

$\{Y_n\}_{n \in N}$ تغطية مفتوحة للمجموعة K

بما أن $K_1 \subseteq K \subseteq \bigcup_{n \in N} Y_n$

ولكون K_1 متراصة فإنه توجد تغطية منتهية

$$Y_{n_1}, Y_{n_2}, \ldots, Y_{n_j}$$

بحيث $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} Y_{n_i}$

بنفس الطريقة نحصل K_2 بأنه توجد تغطية منتهية

$$Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_t}$$

بحيث $K_2 \subseteq \bigcup_{s=1}^{t} Y_{i_s}$

كنتيجة فإن

$$K = K_1 \cup K_2 \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{j} Y_{n_i}\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{t} Y_{i_s}\right)$$

ومنه K متراصة.

/تمهيدية/ كل مجال مغلق ومحدود في الفضاء المتري $(R, |\ |)$ هو مجموعة متراصة.

البرهان:

ليكن $[a, b]$ مجال مغلق ومحدود في R . لتكن $\{x_n\}$ متتالية في $[a, b]$

$$\lim_{n \to \infty} \sup x_n = \beta$$

وإن $a \leq \beta \leq b$

وهذا يعني أن β نقطة ملاصقة للمتتالية $\{x_n\}$

(حسب نظرية سابقة)

ومنه تكون المجموعة $[a, b]$ متراصة.

/تمهيدية/ ليكن (X, d) فضاء متري و K مجموعة متراصة من X و F مجموعة مغلقة من X، إذا كانت $F \subseteq K$ فإن F تكون متراصة.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}_{n\in N}$ متتالية من عناصر F كيفية ومنه فإن $\{x_n\}_{n\in N}$ متتالية من عناصر K

وبما كانت K متراصة فإن المتتالية تملك نقطة ملاصقة ولتكن a،

وبما كانت F مغلقة فإن $a \in F$

$$N(a, \varepsilon) \cap \underbrace{\{x_n\}}_{\subseteq F} \neq \phi$$

إذاً

التقاطع مع $F \neq \phi$

فهي نقطة ملاصقة لـ F
$\Leftarrow$ F متراصة (ص 3)

نتيجة: في أي فضاء متري متراص كل مجموعة مغلقة متراصة.

مبرهنة / ليكن (X, d) فضاء متري و F مجموعة مغلقة في X و K متراصة في X عندئذ $K \cap F$ مجموعة متراصة.

البرهان: (سنبرهن اعتماداً على الشرط ②)

ليكن $\{x_n\}_{n \in N}$ متتالية من عناصر المجموعة $K \cap F$ عندئذ $\{x_n\}$ هي متتالية من عناصر K.

وبما أن K متراصة فإنه يوجد نقطة ملاصقة للمتتالية $\{x_n\}$ ولتكن a وأن $a \in K$

أيضاً بما أن $\{x_n\}$ من عناصر F وأن F مغلقة فإن $a \in F$ وبالتالي $a \in K \cap F$.

مبرهنة / في أي فضاء متري كل مجموعة متراصة تكون مغلقة ومحدودة

البرهان:

ليكن (X, d) فضاء متري و K مجموعة متراصة في X

* ولنبرهن على أن $K = cl(K)$

بديهياً $K \subseteq cl(K)$ دوماً من التعريف

الاحتواء المعاكس،

ليكن $a \in cl(K)$ عندئذ توجد متتالية $\{x_n\}$ من عناصر K

متقاربة من a ، وبما أن K متراصة فإن $a \in K$

$$\Rightarrow \quad cl(K) = K$$

وبالتالي K مغلقة.

* لنبرهن على أن K محدودة،

نلاحظ أن

$$K = \bigcup_{a \in K} \{a\}$$

نوصل كل n لنأخذ الكرة المفتوحة

$$N(a, \varepsilon_n)$$

$$K = \bigcup_{a \in K} \{a\} \subseteq \bigcup_{n \in N} N(a, \varepsilon_n)$$

وبما أن K متراصة فإنه توجد مجموعة منتهية

$$N(a, \varepsilon_1), N(a, \varepsilon_2), \ldots, N(a, \varepsilon_t)$$

بحيث

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} N(a, \varepsilon_i)$$

نأخذ مجموع كل أنصاف الأقطار الموجودة أي

$$\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{t} N(a, \varepsilon_i) \subset N(a, \alpha)$$

وهذا يشير أن

$$\delta(K) < \alpha + 1$$

إذاً K محدودة.

مبرهنة/ لتكن K مجموعة في الفضاء المتري R ، الشروط الآتية متكافئة:

① K متراصة.

② K مغلقة ومحدودة.

الإثبات:

① ⇐ ② كل متراصة مغلقة ومحدودة في أي فضاء متري.
حسب مبرهنة سابقة.

② ⇐ ①
حسب نظرية سابقة.

"من النظريات الهامة"

مبرهنة/ كل فضاء متري متراص هو فضاء تام.

البرهان:

لنفترض أن (X, d) فضاء متري متراص
لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في X
وحسب المبرهنة السابقة فإن المتتالية $\{x_n\}$ تملك نقطة ملاصقة
والتي تكون نقطة تقارب في X
إذاً الفضاء تام.

المبرهنة/ الفضاء (R, d) تام وليس متراص.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}_{n\in N}$ متتالية كوشي في R إذن المتتالية $\{x_n\}_{n\in N}$ محدودة.

ومنه يوجد مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ يحوي المتتالية $\{x_n\}_{n\in N}$

إن المجال $[a,b]$ متراص. "مجال مغلق ومحدود في الفضاء R"

وحسب المبرهنة السابقة

فإن المتتالية $\{x_n\}$ تملك نقطة ملاصقة c بحيث $c\in[a,b]$

والتي تمثل نقطة تقارب للمتتالية $\{x_n\}_{n\in N}$ إذاً (R,d) تام.

$$R=\bigcup_{n\in N}]-n,n[$$

وأنه لا يوجد أي عائلة منتهية من المجالات المفتوحة

$]-n_1,n_1[,]-n_2,n_2[, \dots,]-n_t,n_t[$

تحقق المساواة

$R \neq \bigcup_{i=1}^{t}]-n_i,n_i[$ لا يساوي أي اجتماع منتهي للمجالات.

إذاً R ليس متراص.

#انتهت.