النقاط الشاذة لتابع عقدي:

- z_0 نقطة شاذة لتابع عقدي $f \overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow} f$ غير تحليلي عند z_0

- z_0 شاذة معزولة لـ $f \overset{\text{تعريف}}{\Longleftrightarrow}$ وجود جوار لـ z_0
  أي $D(z_0,R)$ لا يحوي أي نقطة شاذة لـ f سوى z_0
  أي أن f تحليلي على $ann(z_0,0,R)$

- z_0 شاذة غير معزولة $\Longleftrightarrow$ أي جوار لـ z_0 سيحوي نقطة شاذة لـ f مختلفة عن z_0

أنواع النقاط الشاذة المعزولة:

١- نقطة شاذة كاذبة (قابلة للإزالة):

ليكن z_0 شاذة معزولة لـ f

z_0 شاذة كاذبة لـ $f \Longleftrightarrow$ وجود جوار لـ z_0 وتابع تحليلي g على هذا الجوار بحيث $\forall z \in ann(z_0,0,R)\,,\ g(z)=f(z)$

مثال

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}$$ غير قابل للاشتقاق عند (0)

النقطة الشاذة الوحيدة لـ f هي $z=0$ وهي معزولة

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & : z\neq 0\\ 1 & : z=0\end{cases}$$ قابلة للاشتقاق عند (0)

إن $g(z)$ تحليلي على $\mathbb{C}$ وضوحاً

$g(z)=f(z)=\frac{\sin z}{z}$ قابل للاشتقاق عند كل $z\neq 0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z)-g(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sin z}{z}-1}{z}=\lim\frac{\sin z - z}{z^2}$$

طريقة النشر:

$$\frac{\sin z - z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\cancel{z}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots-\cancel{z}\right)=-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\cdots \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

$\Leftarrow$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$ (المفتوحة) $\qquad g'(0)=0$

(يمكن أن نرمز لـ $ann(0,0,\infty)$ بالرمز $\mathbb{C}^*$)

/ /

طريقة أوبيتال:

$$\lim_{z\to0}\frac{g(z)-g(0)}{z}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z - z}{z^2}$$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

حالة عدم تعيين

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos z-1}{2z}$$

$\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-\sin z}{2}=0$$

$\forall z \in ann(0,0,\infty) : g(z)=f(z)$

إذا لم تكن النقطة الشاذة z_0 كاذبة فهي نقطة شاذة صادقة

مبرهنة

لتكن z_0 شاذة معزولة لـ f عندئذ:

z_0 شاذة كاذبة لـ $f \Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim_{z\to0}(z-z_0)f(z)=0}$

مثال

$$\lim_{z\to0} z\left(\frac{\sin z}{z}\right)=\lim_{z\to0}\sin z=\sin(0)=0$$

$\Leftarrow$ $z=0$ نقطة شاذة كاذبة لـ $f(z)=\frac{\sin z}{z}$

مثال

$$f(z)=\frac{z-i}{z^2+1}$$

للتابع f نقطتان شاذتان معزولتان هما $z=i$, $z=-i$

$z=i$ هي نقطة شاذة كاذبة

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z+i}=0$$

$$\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{z-i}{z^2+1}=\lim 1=1\neq0$$

$\Leftarrow$ $z=-i$ شاذة صادقة.

النقطة الشاذة الصادقة:

لها نوعين: 1) النقطة الشاذة الصادقة القطبية

2) النقطة الشاذة الصادقة الاساسية

1) النقطة الشاذة الصادقة القطبية

نقول عن نقطة شاذة صادقة z_0 لتابع f إنها قطب لـ f من المرتبة m

إذا كانت z_0 شاذة صادقة لـ $(z-z_0)^{\ell} f(z)$, $\forall \ell < m$

وكاذبة لـ $(z-z_0)^m f(z)$

أي $\left(\begin{array}{l} \forall k \le m \Rightarrow \lim (z-z_0)^k f(z) \neq 0 \\ \text{و } \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^{m+1} f(z) = 0 \end{array} \right)$

مثال $\frac{1}{z^3}$

مبرهنة:

z_0 قطب من المرتبة m $\Longleftrightarrow$ $\lim (z-z_0)^m f(z)$ موجودة ومحدودة.

أمثلة:

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$

$z=0$ النقطة الشاذة الوحيدة لـ f وهي شاذة صادقة

لأن $\lim\limits_{z \to 0} z \frac{\sin z}{z^4} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z^3} = \infty$

$\lim z^3 f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$

$\Leftarrow$ $z=0$ قطب مضاعف من المرتبة $m=3$

2) $f(z) = \frac{z-i}{(z^2+1)^2}$

$z=i$, $z=-i$ هما النقطتان الشاذتان الوحيدتان لـ f

$z=i$ قطب من المرتبة الأولى لـ f (قطب بسيط لـ f) لأن

$\lim\limits_{z \to i} (z-i) \frac{z-i}{(z^2+1)^2} = \lim \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2} = \frac{1}{(2i)^2} = \frac{-1}{4} \neq 0$

($z=-i$) قطب مضاعف من المرتبة الثانية لأن:

$\lim\limits_{z \to -i} (z+i)^2 f(z) = \lim\limits_{z \to -i} \frac{(z+i)^2 (z-i)}{(z-i)^2 (z+i)^2} = \lim\limits_{z \to -i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i} \neq 0$

#

ملاحظة: عندما تكون مرتبة الجذر تساوي الواحد يسمى جذر بسيط
⊖ عندما تكون مرتبة الجذر أكبر من الواحد (أكبر أو يساوي 2)
يسمى جذر مضاعف.

وظيفة: تمرين: أوجد النقاط الشاذة للتوابع التالية وبين نوع كل منها:

1) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

2) $g(z)=\dfrac{z}{\sin(i\pi z)}$, 3) $h(z)=\dfrac{z^2-3iz}{(z^2+9)^2(z+2i)}$

ج) النقطة الشاذة الصادقة الأساسية:
z_0 نقطة شاذة أساسية لـ f إذا وفقط إذا كانت z_0 شاذة صادقة ولم تكن قطبة
أي $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{\ell} f(z)\neq 0 \quad \forall \ell$

مثال: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$
النقطة الشاذة الوحيدة لـ f هي $z=0$
$\lim\limits_{z\to 0} z^{\ell} e^{\frac{1}{z}}=\infty \quad , \forall \ell$
نشر مالورن للتابع f غير موجود
$z^{\ell} e^{\frac{1}{z}}=z^{\ell}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!\cdot z^3}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots\right)\xrightarrow[z\to 0]{}\infty$
سيوضح معنى هذا النشر لاحقاً.

أصفار تابع عقدي
نقول عن z_0 أنها صفر للتابع f إذا كان $f(z_0)=0$

مثال
$z=\pi$ هي صفر للتابع $f(z)=\sin z$ لأن
$f(\pi)=\sin\pi=0$

ملاحظة أصفار تابع هي حلول المعادلة $f(z)=0$

مثال أصفار التابع $f(z)=\sin z$ هي حلول المعادلة $\sin z=0$

أي هي المجموعة $\{\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$

ملاحظة نقول عن صفر (جذر) z_0 لتابع f إنه صفر من المرتبة m

إذا وجد تابع $g(z)$ بحيث يكون

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)=0 \quad \wedge \quad g(z)\neq 0$$

مبرهنة ليكن z_0 صفراً للتابع f

$(z_0$ هو صفر من المرتبة m لـ $f) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(m-1)}(z_0)=0 \\ f^{(m)}(z_0)\neq 0 \end{array}\right)$

⊛ إذا كان $m=1 \Leftarrow z_0$ صفر بسيط للتابع

مثال $f(z)=z^3$

$f'(z)=3z^2 \Rightarrow f'(z_0)=0$

$f''(z)=6z \Rightarrow f''(z_0)=0$

$f^{(3)}(z)=6 \Rightarrow f'''(z_0)=6$

$f^{(4)}(z)=0$

$\Leftarrow$ مرتبة صفر التابع $z=0$ هي 3

⊛ مرتبة صفر تابع هي مرتبة أول مشتق للتابع غير معدوم عند هذا الصفر.

مثال $f(z)=\sin z$

ان أصفار هذا التابع تمثل بالمجموعة $\{\pi k ; k\in\mathbb{Z}\}$

وجميع هذه الأصفار بسيطة لـ $f(z)$ لأن

$f'(z)=\cos z$

$f'(\pi k)=\cos(\pi k)=(-1)^k\neq 0$

* التابع الصفري مرتبة أصفاره هي ∞ .

مثال: عين أصفار التابع $f(z)=1+\cos z$ وبين مرتبة كل منها .

الحل:

أصفار f هي حلول المعادلة $f(z)=0$

$\Rightarrow \cos z=-1$

$\Leftarrow$ أصفار f هي $z_k=(2k+1)\pi \; ; k\in\mathbb{Z}$

$f'(z)=-\sin z$

$f'(z_k)=-\sin((2k+1)\pi)=0$

$f''(z)=-\cos z$

$f''(z_k)=-\cos((2k+1)\pi)$

$=1\neq 0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$

إن أصفار f هي $z_k=(2k+1)\pi \; ; k\in\mathbb{Z}$

وجميع أصفاره مضاعفة من المرتبة الثانية لـ f

ملاحظة:

بالامتحان هناك سؤال دوماً على النقطة الشاذة والأصفار يأتي بشكل مباشر أو غير مباشر.

انتهت المحاضرة الثالثة عشر