المحاضرة الثامنة عشرة — الاثنين ١١/٥/ ٢٠١٥

- تعريف القياس
- ملاحظات
- خواص القياس

تعريف القياس: ليكن لدينا $X \neq \emptyset$ ، $\mathcal{A}$ جبر تام من اجزاء X "صف"

نقول عن التابع $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \quad : \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$

انه قياس إذا تحقق الشرطين:

1/ $\mu(\emptyset) = 0$

2/ $\forall A_i \in \mathcal{A}, \; i \in \mathbb{N} \;,\; A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

دالة القياس

ونرمز لفضاء القياس ب $(X, \mathcal{A}, \mu)$

الجبر التام على X

وكل مجموعة $A \in \mathcal{A}$ تسمى مجموعة قيوسة.

وإذا كان $\mu(A) < +\infty$ يدعى القياس μ منتهي وذلك $\forall A \in \mathcal{A}$

ملاحظات:

1. $\forall A \in \mathcal{A}$ فإن $\mu(A) \geq 0$

2. إذا كان قياس X يساوي الواحد اي $\mu(X) = 1$ فإن $0 \leq \mu(A) \leq 1$

وبالتالي $(X, \mathcal{A}, \mu = P)$ فضاء احتمالي

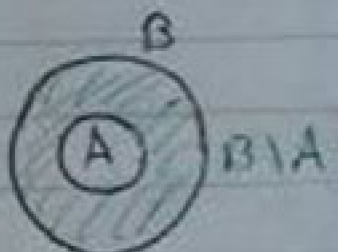
خواص القياس:

1. الخاصية الفرقية:
2. الخاصية الطردية
3. الخاصية النصف جمعية (المعدودة).
4. خاصية الاستمرار من الأدنى.
   خاصية الاستمرار للاجتماع
5. خاصية الاستمرار من الأعلى.
6. خاصية الاستمرار للتقاطع

1- خاصية القياس الفرقية:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

الاثبات:



نعلم ان $B = A \cup (B\setminus A)$

ونعلم ايضاً $A \cap (B\setminus A) = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A\cup(B\setminus A))$$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A) \Rightarrow \mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

تمرين: اثبت ان $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B)$

2- الخاصية الطردية: وهي كالتالي $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

الاثبات:

نعلم ان $B = A \cup (B\setminus A)$ ؛ $A \cap (B\setminus A) = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A\cup(B/A)) = \underbrace{\mu(A) + \mu(B\setminus A)}$$

بما ان $\mu(B\setminus A) \geq 0$ فنحذفه ونبقي على $\mu(A)$ فنحصل على ما يلي

$$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$$

الخاصية نصف الجمعية: (المحدودة)
وهي كالتالي:

$$\forall \underset{i\in\mathbb{N}}{A_i} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

نقوم بإنشاء مجموعات منفصلة مثنى مثنى:

$$B_1 = A_1 \quad , \quad B_2 = A_2 \setminus A_1 \quad , \quad B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$\ldots \; B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), \ldots$$

نلاحظ: $i=1,2,\ldots$

$\boxed{1}$ $B_i \subseteq A_i \Rightarrow \mu(B_i) \leq \mu(A_i)$

$\boxed{2}$ $\underset{i\neq j}{B_i \cap B_j} = \emptyset$ $\qquad$ $\boxed{3}$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

وبما أن B_i $(i=1,2,\ldots)$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى فإن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

خاصية الاستمرار من الأدنى:

لتكن $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ مجموعات مقيسة من فضاء قياس.

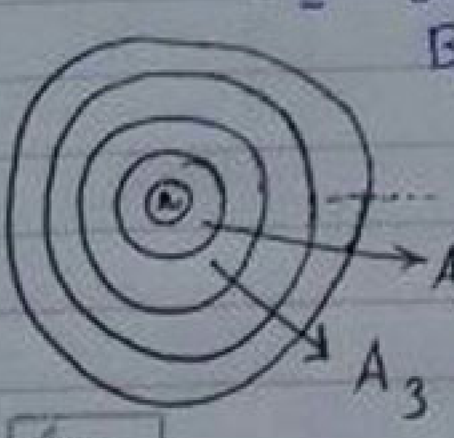
فإن $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

الإثبات:

نقوم بإنشاء متتالية من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى بالشكل التالي:

$$B_1 = A_1 \quad , \quad B_2 = A_2 \setminus A_1 \quad , \quad B_3 = A_3 \setminus A_2 \ldots$$

$$\ldots \; B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$



نلاحظ أن $\underset{i\in\mathbb{N}}{B_i} \subseteq A_i$

$$\underset{i \in \mathbb{N}}{B_i} \subseteq A_i \Rightarrow \mu(B_i) \leq \mu(A_i)$$

$$\underset{i \neq j}{B_i \cap B_j} = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}_{\text{مجموعات منفصلة مثنى مثنى}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(B_n)$$

$$= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$$

$$= \mu(A_1) + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=2}^{n} \mu(A_i \setminus A_{i-1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\cancel{\mu(A_1)} + \mu(A_2) - \cancel{\mu(A_1)} + \mu(\cancel{\ }) \cdots + \mu(A_n) - \cancel{\mu(A_{n-1})} \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$$

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة ..