المحاضرة الخامسة عشرة، الخميس   خ ٢٩/٤/٢٠١٥

* تعريف التفاضل الكلي

إذا كانت الدالة $z = z(x,y)$ تابعة لمتغيرين مستقلين فإن التفاضل الكلي للدالة z هو:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

إذا كان السطح $f(x,y) = 0$ فإن التفاضل الكلي لهذا السطح هو:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

* حلول المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من المرتبة الأولى

* نظرية لتوابع الصحيحة: نفرض لدينا

$$① \quad F(x,y,z,p,q) = 0$$

و

$$② \quad \varphi(x,y,z,p,q) = 0$$

حيث p,q الدالتان اعتباريتان نحصل لمتغيرات مستقلة:

$$\left.\begin{array}{l} p = p(x,y,z) \\ q = q(x,y,z) \end{array}\right\} \cdots ③$$

عندها تكون المشتقات الجزئية كالتالي

هذه القوانين للحفظ!! والبرهان غير مطلوب...

$$\text{I} \cdots \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

$$\text{II} \cdots \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

$$\text{III} \cdots \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

$$\text{IIII} \cdots \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

الإثبات: العلاقة (III) والأخيرة غير مطلوب للامتحان :

مشتق F بالنسبة لـ x (1) $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0$

مشتق F بالنسبة لـ y (2) $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}=0$

مشتق F بالنسبة لـ z (3) $\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}=0$

مشتق ϕ بالنسبة لـ x (4) $\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0$

مشتق ϕ بالنسبة لـ y (5) $\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}=0$

مشتق ϕ بالنسبة لـ z (6) $\frac{\partial \phi}{\partial z}+\frac{\partial \phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}=0$

لإثبات (I) نعزل $\frac{\partial p}{\partial x}$ من (1) و (4)

لإثبات (II) نعزل $\frac{\partial q}{\partial y}$

لإثبات (III) نعزل $\frac{\partial q}{\partial z}$

وهكذا....

نعزل $\frac{\partial p}{\partial x}$ من (1) و (4)

ونضربهم مساوين لبعض نجد

17 Sunday

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial p}-\frac{\partial \phi}{\partial x}\cdot\cancel{\frac{\partial \phi}{\partial x}}}{\frac{\partial \phi}{\partial p}}$$

// غير مطلوب بالامتحان // نعزل $\frac{\partial q}{\partial x}$ من الطرفين ونحصل على العلاقة I

× طريقة شارب في حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من المرتبة الأولى

● لتكن لدينا المعادلات التفاضلية الجزئية التالية $F(x,y,z,p,q)=0$ ....(1)

حيث $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ و $q=\frac{\partial z}{\partial y}$

● ولتكن المعادلة التفاضلية الجزئية الثلاثية ... $\phi(x,y,z,p,q,a)=0$ ...(2)

حيث a ثابت اختياري وحيث (2) تحقق الشرطين التاليين

(أ): أن حل (1) و(2) بالنسبة لـ p و q هو:

$$(3)\ldots\begin{cases}p=p(x,y,z,a)\\ q=q(x,y,z,a)\end{cases}$$

(ب): المعادلة التفاضلية الكلية التالية: $dz=p\,dx+q\,dy$ هي قابلة للحل...

عندها نسمي المعادلة (2) بمعادلة متوافقة مع المعادلة (1)

● نعوض (3) في (4) نجد

$$(5)\ldots dz=p(x,y,z,a)\,dx+q(x,y,z,a)\,dy$$

حيث a,b ثابتان اختياريان

إذا كان لها حل فسيكون من الشكل:

$f(x,y,z,a,b)=0 \ldots$ (6)

(6) حل لـ (4) و (5) حل لـ (3) و (3) حل مشترك (1) و (2)

إذاً (6) حل لـ (1) و (2)

ملخص طريقة شاربت

لإيجاد المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى الغير خطية نتبع ما يلي:

1) نحسب المشتقات الجزئية للمعادلة: $F(x,y,z,p,q)=0$ وهي

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z},\ \frac{\partial f}{\partial p},\ \frac{\partial f}{\partial q}$$

حيث x,y,z متغيرات مستقلة..

2) ثم نعوض هذه المشتقات المساعدة التالية

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

ملاحظة: أي حل تام يخرج لدينا فهو مقبول

3) نوجد الحل التام لهذه الجملة المساعدة وليكن

$\phi(x,y,z,p,q,a)=0$

وهناك شرط يجب أن يتوفر بالحل التام وهو أن يحوي p أو q أو كلاهما

4) نحل المعادلة $p(x,y,z,a)$ و $q(x,y,z,a)$

بالنسبة لـ p و q ثم نعوض بـ

$dz=p\,dx+q\,dy \ldots$ (*)

5) ثم نوجد حل المعادلة التفاضلية السابقة (*) وليكن من الشكل

$f(x,y,z,a,b)=0$

6) نكتب $b=t(a)$ عندها $f(x,y,z,a,t(a))$ هو الحل العام للمعادلة

حيث $t(a)$ دالة اختيارية. وإذا كانت $t(a)$ دالة معينة فإن ما نسميه $f(x,y,z,a,t(a))=0$

بالحل الخاص..

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بطريقة شاربت:

$z-qp=0$

ليست خطية لاحتوائها على جداء pq

هنا المعادلة غير خطية لذلك يجب استخدام طريقة شاربت.