محاضرة ١٢

نتيجة: لتكن R حلقة تبديلية واحدية و كان $P \in Spec(R)$

فإن $\sqrt{P} = P$

البرهان: $\forall x \in P \;,\; x \in \sqrt{P} \Rightarrow P \subseteq \sqrt{P}$

$\forall x \in \sqrt{P} \Rightarrow \exists n \geq 0 \;:\; x^n \in P$

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{x^n} \in P \Rightarrow x \in P$

$\Rightarrow \sqrt{P} \subseteq P$

من ١ و ٢ ينتج $\sqrt{P} = P$

مبرهنة: لتكن R حلقة تبديلية، إذا كان I مثالي في R فإن:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P$$

البرهان:

$\forall x \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists n \geq 0 \;;\; x^n \in I \subseteq P$

$\forall P \in Spec(R) \Rightarrow x \in P \quad \forall P \in Spec(R), I \subseteq P$

$\Rightarrow x \in \bigcap P$

$$\Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \bigcap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P$$

الاحتواء المعاكس

نفرض جدلاً أن $\bigcap_{I\subseteq P\in Spec(R)} P \not\subseteq \sqrt{I}$

أي أن

$\exists x \notin \sqrt{I}$ و $x \in \bigcap_{I\subseteq P\in Spec(R)} P$

$\therefore \forall n\in \mathbb{N} , x^n \notin I \; ; \; x\in P , I\subseteq P\in Spec(R)$

$$M = \{ \underbrace{J \triangleleft R}_{\text{مثالي فعلي في } R} \; ; \; x^n \notin J , \forall n\in \mathbb{N} , I\subset J \}$$

M ليست مجموعة خالية لأن $I\in M$ (حسب الشرط السابق)

وبالتالي M وفق الاحتواء مجموعة مرتبة.

علماً أنها تحقق شروط زورن

لتكن $J_1\subseteq J_2\subseteq \dots$ سلسلة متزايدة من عناصر M

لازم تكون تملك حد أعلى

نعرف :

$$J = \bigcup_{i\geq 1} J_i \underbrace{\triangleleft R}_{\text{مثالي فعلي في } R}$$

بسبب علاقة الاحتواء فإن J مثالي في R

كونه اجتماع عناصر السلسلة فهو حد أعلى للسلسلة

$$\forall i \geq 1 : I \subseteq J_i \Rightarrow I \subseteq J$$

(أريد أن أثبت أنه لا يساوي الحلقة R)

نفرض جدلاً أن $J = R$

(بما أنها تحتوي الواحدية)

$\Rightarrow 1\in J \Rightarrow \exists i_0 \geq 1 \; ; \; 1 \in J_{i_0}$

$\Rightarrow J_{i_0} = R$

وهذا تناقض، ومنه $J \triangleleft R$

J مثالي فعلي في R

$$\exists n \in N \;;\; x^n \in J = \bigcup_{i \geq 1} J_i$$

$$\Longrightarrow \exists t \geq 1 \;;\; x^n \in J_t$$

وهذا غير ممكن ومنه

$$\forall n \in N : x^n \notin J$$

مما سبق تكون J حدا علويا للسلسلة التراتبية في M . حسب تمهيد زورن يوجد

عنصر أعظمي منه $\wp \in M$

ومنه $\wp \triangleleft R$ و

واضح أن $I \subseteq \wp$ و $\forall n \in N : x^n \notin \wp$

لنبرهن أن $\wp$ مثالي أولي في R

نفرض جدلا أن $\wp$ ليس مثالي أولي في R

عندئذ $\exists\, a, b \in \mathbb{R} \;;\; a.b \in \wp \;,\; a \notin \wp$ و $b \in \wp$

$a, \wp \notin M$

$$\left.\begin{array}{l} \wp \subsetneq \langle a, \wp \rangle \subseteq R \\ \text{شرحام في التشكيل} \\ \wp \subsetneq \langle b, \wp \rangle \subseteq R \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \langle a, \wp \rangle = R \\ \langle b, \wp \rangle = R \end{cases}$$

$a.b \in R$

$$\Longrightarrow \langle a.b, \wp \rangle = \wp$$

$$\exists\, m_0, n_0 \in N \;,\; x^{n_0} \in \langle a, \wp \rangle$$

$$\Longrightarrow x^{n_0+m_0} \in \langle a, b, \wp \rangle = \wp \qquad \cancel{\exists t \geq x}$$

$$\Longrightarrow \exists\, S = n_0 + m_0 \in N \;;\; x^S \in \wp$$

$\forall n \in N : x^n \notin q$ & $I \subseteq q$ & $q \in Spec(R)$

$$x \in \bigcap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P \subseteq q$$

وهذا يناقض كون

$$\forall n \in N : x^n \notin q$$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ ومنه يكون

$$\bigcap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P \subseteq \sqrt{I}$$

نتيجة:

$$\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

مبرهنة: (تجنب المثالي الأولي) (Prime Avoidance)

لتكن R حلقة تبديلية و $P_1, P_2, \dots, P_{n-2} \in Spec(R)$

و $P_{n-1}, P_n \trianglelefteq R$ $\quad n \geq 3$

عندئذ إذا كان I مثالي في R يحقق:

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

فإن

$$\exists j \in [1, 2, \dots, n] : I \subseteq P_j$$

الإثبات: يتم الإثبات بالاستقراء الرياضي على n

من أجل $n = 1$ $\quad I \subseteq P_1$ يتم المطلوب

نفرض صحتها من أجل $n-1$ أي

فإن $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ $\quad I \subseteq P_j$

$\forall j \in [1, \dots, n]$

ولنبرهن صحتها لأجل n

من أجل n يكون لدينا $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$

نفرض صحة $I : I \not\subseteq P_j$

$\forall j \in [1, 2, \dots, n] \quad ; \quad x \in I \; ; \; x \notin P_j$

$$x \in I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} P_i\right) \cup P_n$$

نميز ثلاث حالات :

1) $x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i \Longrightarrow \exists j \in [1, 2, \dots n-1] ; x \in P_j$

2) $x \in P_n$

3) $\exists a_i \in P_i \quad ; \quad x = a_1 . a_2 \dots a_n \in I_i$

من 3 حالات وجدنا تناقض كون

$\forall j \in [1, 2, \dots, n] \; , \; x \notin P_j$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ

ومنه : $\exists j \in [1, \dots n] \; ; \; x \in P_j$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية

إذا كان $I \underset{\neq}{\Delta} R$;

فإنه $\exists M \, \Delta . R \; ; \; I \subseteq M$

الإثبات: نعرف المجموعة M مجموعة كل المثاليات

$$M = \{ J \underset{\neq}{\trianglelefteq} R \ : \ I \subseteq J \}$$

أن $M \neq \emptyset$ و $I \in M$

$(M , \subseteq)$ مرتبة كلياً

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$$

سلسلة متزايدة من عناصر M

لأن $J = \bigcup_{i \geq 1} J_i \trianglelefteq R$

حسب ما أنه ، مجاميع توصلنا على أنه السلسلة

1) $\forall i \geq 1 : I \subseteq J_i \Longrightarrow I \subseteq J$

2) $J \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

نفرض جدلاً $J = R$ ، $I \in J = \bigcup_{i \geq 1} J_i$

$\Longrightarrow \exists i_0 \geq 1 ; 1 \in J_{i_0}$ ، $J \in M$ ، $J \in M$ وهذا تناقض

وبالتالي مما سبق تكون J حد أعلى للسلسلة في M

حسب مبرهنة زورن يوجد عنصر أعظمي في M.

يوجد عنصر أعظمي حسب مبرهنة زورن وليكن $\mathfrak{m}$

$$\exists \mathfrak{m} \triangleleft\cdot R : I \subseteq \mathfrak{m}$$

مبرهنة: لتكن R حلقة تبديلية واحدية

إن القضيتين التاليتين متكافئتين:

1) $a \in J(R)$

2) $\forall b \in R : 1 - ab \in U(R)$

متكافئتان

الإثبات: $(2 \leftarrow 1)$ نفرض جدلاً أنه يوجد

$b \in R \; ; \; 1 - ab \notin U(R)$

ومنه $\langle 1 - a.b \rangle \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

حسب المبرهنة السابقة $\Longrightarrow \exists \, \mathcal{M} \vartriangle . R \; ; \; \langle 1 - a.b \rangle \subseteq \mathcal{M}$

$$1 = \underbrace{(1 - ab)}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{ab}_{\in J(R) \subseteq \mathcal{M}} \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathcal{M} = R$$

وهذا تناقض

$(1 \leftarrow 2)$ نفرض جدلاً أن

$a \notin J(R) \longrightarrow \exists \, \mathcal{M} \vartriangle . R \; ; \; a \notin \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{M} \underset{\neq}{\subset} \langle \mathcal{M}, a \rangle \subseteq R \Rightarrow R = \langle a, \mathcal{M} \rangle$

ومنه يوجد $m \in \mathcal{M}$

$\Longrightarrow \exists b \in R \; ; \; 1 = a \cdot b + m$

$m \in \mathcal{M} \Rightarrow m = 1 - ab \in U(R)$

ومنه $\mathcal{M} = R$ وهذا تناقض

لأن $\mathcal{M}$ مثالي أعظمي لا يساوي كامل الحلقة

نتيجة: لتكن R حلقة تبديلية واحدية

$$1+a \in U(R) \iff a \in J(R)$$

الإثبات: $(\Leftarrow)$

$$1 \in R \Rightarrow -1 \in R$$

حسب المبرهنة السابقة

$$1+a = 1-(-1)a \in U(R)$$

$$1-(-a) = 1+a \in U(R) \Rightarrow a \in J(R) \quad (\Rightarrow)$$

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية (واحدية). نقول أن R حلقة محلية إذا وفقط إذا وجد مثالي أعظمي وحيد في R

نتيجة من التعريف: لتكن R حلقة (تبديلية واحدية)

$$R \text{ محلية} \iff J(R) \Delta\cdot R$$

أمثلة: 1) إن كل حقل هو حلقة محلية
مثالي أعظمي وحيد هو (0)

2) إذا كانت R حقل فإن $R[x]$ حلقة محلية، والمثالي الأعظمي الوحيد فيها $J(R) = \langle x \rangle$

$\langle x^{-2} \rangle$ مثالي أعظمي حيث $\langle x \rangle = \langle x^{-2} \rangle$

سؤال دورة 3 تمرين: لتكن R حلقة تبديلية واحدية

1) بين أنه ليس بالضرورة أن تكون المثالية

$$S = R \setminus U(R)$$

ليس بالضرورة أن يكون مثالي

2) $S = R \setminus U(R)$ مثالي ، فإن S مثالي أعظمي في R