مبرهنة:

إذا كانت $V,W \subset \mathbb{K}^n$ متنوعات أفينية فإن كلاً من $V \cap W$ و $V \cup W$ متنوعات أفينية.

الإثبات:

نفرض $V = V(f_1, \dots f_s)$ ، $W = V(g_1, \dots g_t)$ عندئذٍ يصبح المطلوب

(1) $V \cap W = V(f_1, \dots f_s, g_1, \dots g_t)$

الأصفار المشتركة لـ g_j و f_i كلهم.

(2) $V \cup W = V(f_i g_j \; ; \; 1 \le i \le s \;, \; 1 \le j \le t)$ $f.g = 0$

f أو g صفرية.

① تعني أنه وقوع نقطة من $V \cap W$ ولتكن $P = (a_1, \dots a_n)$ يقود إلى أنه $f_i(P) = 0$

لكل $1 \le i \le s$ و $g_j(P) = 0$ لكل $1 \le j \le t$

أي نقول: $P \in V \cap W \longrightarrow \begin{cases} f_1 = \dots = f_s = 0 \\ g_1 = \dots = g_t = 0 \end{cases}$

وهذا يكافئ:

$f_1 = f_2 = \dots = f_s = g_1 = g_2 = \dots = g_t = 0$

ومنه التقاطع هو متنوعة أفينية حسب التعريف.

② إذا فرضنا $P = (a_1, \dots a_n) \in V$ عندئذٍ $f_i(P) = 0$ لكل $1 \le i \le s$

ومنه $f_i g_j(P) = 0$ إذن $P \in V(f_i g_j)$

ومنه $V(f_i g_j) \supseteq V$

وبنفس الطريقة نجد أنه $V(f_i g_j) \supseteq W$

ومنه فإنه $\boxed{V \cup W \subseteq V(f_i g_j)}$ ⊛

$1 \le i \le s \;, \; 1 \le j \le t$

ومن جهة ثانية :

لنأخذ $p \in V(f_i g_j)$ فإذا وقعت p في V ($p \in V$) فيكون تم المطلوب.

وإذا لم تقع p في V فهذا يعني أنه يوجد عدد i_0 مثلاً بحيث f_{i_0} لا ينعدم عند p

$f_{i_0}(p) \neq 0$.

وبما أن $f_{i_0} g_j(p) = 0$ لكل $1 \leq j \leq t$ وهذا معناه $p \in W$

ومنه

$$\boxed{V(f_i g_j) \subseteq W \cup V} \quad (**)$$

من $(*)$ & $(**)$ فإن $W \cup V = V(f_i g_j)$ ويتم المطلوب.

نتيجة: اجتماع وتقاطع عدد منته من المتنوعات الأفينية هو متنوعة أفينية.

مثال: لنفرض المستوي (x,y) والمحور z عندئذٍ :

- $V(x,y) \cup V(z) = V(xz, yz)$

الفضاء الثلاثي 3-space $= V(xz) \cap V(yz) =$

$V(x,y) \cap V(z) = V(x,y,z) \underset{\text{حسب التعريف}}{=} \{(0,0,0)\}$

④ المثاليات : Ideals.

نذكر بتعريف المثالي :

$I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ نقول إن I مثالي :

- $0 \in I$
- $f+g \in I \quad \forall f,g \in I$
- $\forall f \in I$ و $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ عندئذٍ $h.f \in I$

تعريف :

اذا كانت $f_1, \dots f_s \in K[x_1, \dots x_n]$ عندئذٍ نعرف المجموعة المولدة بكثيرات الحدود هذه .

$$\langle f_1, \dots f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \; ; \; h_i \in K[x_1, \dots x_n] \right\}$$

وهذه المجموعة تشكل مثالي كما توضح المبرهنة التالية .

مبرهنة :

اذا كانت $f_1, \dots f_s \in K[x_1, \dots x_n]$ فإن $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ تشكل مثالي في $K[x_1, \dots x_n]$

الإثبات :

- $0 \in \langle f_1, \dots f_s \rangle$ وضوحاً . لأنه $0 = 0f_1 + 0f_2 + \dots + 0f_s$
- نفرض $f = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ و $g = \sum_{i=1}^{s} h'_i f_i$ عندئذٍ :

$$f + g = \sum_{i=1}^{s} (h_i f_i + h'_i f_i) = \sum_{i=1}^{s} (h'_i + h_i) f_i \in \langle f_1, \dots f_s \rangle .$$

- اذا كان $f = \sum_{i=1}^{s} p_i f_i$ وليكن $h \in K[x_1, \dots x_n]$ عندئذٍ :

$$h \cdot f = \sum_{i=1}^{s} h (p_i f_i) = \sum_{i=1}^{s} (h p_i) f_i \in \langle f_1, \dots f_s \rangle$$

ملاحظة :

يمكن التعبير عن المثالي $\langle f_1, \dots f_s \rangle$ على شكل جملة معادلات

$$f_1 = 0 \; , \; f_2 = 0 \; , \; \dots \dots \; , \; f_s = 0 \qquad (*)$$

اذا ضربنا المعادلة الأولى بـ h_1 والثانية بـ h_2 ... والأخيرة بـ h_s ثم جمعنا نجد :

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s = 0 \qquad (**)$$

الجملة (* *) ناتجة من الجملة (*) بإجراء عمليات جبرية ومن خلاله نجد أن الطرف الأيسر منها هو عنصر من $\langle f_1, f_2, \dots f_s \rangle$.

مثال: لنأخذ الجملة :

$$x = 1+t$$
$$y = 1+t^2$$

ولنكتب الجملة بالشكل :

$$\left.\begin{aligned} x-1-t &= 0 \\ x-1-t^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

كي نحذف الحدود التي تحوي t نضرب المعادلة الأولى بـ $(x-1+t)$ ونضرب المعادلة الثانية بـ -1

ثم نجمع النواتج :

$$(x-1+t)(x-1-t) \quad -1\,(x-1-t^2) = 0$$
$$(x-1)^2 - t^2 - y + 1 + t^2 = 0$$
$$(x-1)^2 - y + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 - y + 1 = 0$$

ومنه أصبحت بهذا الشكل :

$$\boxed{x^2 - 2x - y + 2 = 0}$$

وهذه المعادلة يعبر عنها بدلالة المثالي المولد بالجملة (1) . أي :

$$x^2 - 2x - y + 2 \in \langle x-1-t \ , \ y-1-t^2 \rangle$$

ملاحظة :

1) المثالي المولد بعدد منته من كثيرات الحدود نسميه مثالي منتهي التوليد ونسمي كثيرات الحدود قاعدة للمثالي .

و كل مثالي في $K[x_1,\dots x_n]$ هو مثالي منته التوليد .

2) هناك تشابه بين الفضاءات الجزئية والمثاليات من حيث :

1) الانغلاق بالنسبة للجمع

2) الانغلاق بالنسبة للضرب

3) التوليد والقاعدة .

/ /

مبرهنة :

اذا كانت $\{f_1,\dots f_s\}$ و $\{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدتين لمثالي I من $K[x_1,\dots x_n]$

بحيث $\langle f_1,\dots f_s\rangle = \langle g_1,\dots g_t\rangle$ عندئذٍ يكون $V(f_1,\dots f_s) = V(g_1,\dots g_t)$.

مثال: ليكن $I_1 = \langle \overbrace{2x^2+3y^2-11}^{f_1} , \overbrace{x^2-y^2-3}^{f_2} \rangle$

$I_2 = \langle x^2-4 , y^2-1 \rangle$

أثبت أن $I_1 = I_2$ ثم استنتج أن $V(I_1) = V(I_2)$

الحل :

لنأخذ الجملة (1)

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2-y^2-3=0 & \rightarrow \text{نضرب بـ } 3 \\ 2x^2+3y^2-11=0 & \rightarrow \text{نضرب بـ } 1 \end{array}\right.$$

ثم نجمع $f_1(1) + f_2(3) = 0$

$$2x^2+\cancel{3y^2}-11+3x^2-\cancel{3y^2}-9=0$$

$$5x^2-20=0$$

$$\boxed{x^2-4=0}$$

(بنفس الطريقة نحذف x^2)

$$1.f_2 - 2.f_2 = 0$$

$$2x^2+3y^2-11-2x^2+2y^2+6=0$$

$$\boxed{y^2-1=0}$$

ومنه الجملة $\begin{cases} x^2-4=0 \\ y^2-1=0 \end{cases}$ (2) ناتجة عن (1) باجراء تقنيات جبرية وبالتالي متكافئتان

ومنه

$$I_1 = \langle 2x^2+3y^2-11 , x^2-y^2-3 \rangle =$$

$$\langle x^2-4 , y^2-1 \rangle = I_2$$

ومنه حسب المبرهنة السابقة $V(I_1) = V(I_2)$

ونجد أن الجواب هو $(\mp 2, \mp 1)$.

ملاحظة :

المغزى من المبرهنة الأخيرة هو أنه تغيير قاعدة مثالي ما لا يغير من المتنوعة الأفينية .

لذلك يتم اللجوء إلى تغيير قاعدة مثالي إلى قاعدة أبسط لتسهيل إيجاد المتنوعة الأفينية .

وهذا معناه أيضاً أن المتنوعات تتعين بواسطة مثاليات وليس بواسطة كثيرات حدود .

انتهت المحاضرة التاسعة

حل تمرين 8-1 :

إيجاد حدودية غير صفرية في $\mathbb{Z}_2[x,y,z]$ ولكنها تنعدم في نقاط $\mathbb{Z}_2^3$

لو أخذنا

$$f(x,y,z) = x^2yz - xyz$$

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}_2^3 : f(a,b,c) = 0$$

حل تمرين 8-2 : ارسم $V(\underbrace{x^2+y^2-2}_{f_1}, \underbrace{xy-1}_{f_2})$

- نلاحظ أن f_1 تعدم نقاط الدائرة التي نصف قطرها $\sqrt{2}$.
- نلاحظ أن f_2 تعدم نقاط القطع الزائد الذي معادلته $xy = 1$.

ومنه الحل المشترك هو

$$\{(1,1), (-1,-1)\} = V(f_1, f_2)$$