الأربعاء: 2015/4/29

المحاضرة الثانية عشر:

مثال (1): (صفحة 105)

أوجد أصغر عدد صحيح باقي قسمته على 6 يساوي 2 وباقي قسمته على 5 يساوي 3 وباقي قسمته على 11 يساوي 7 ؟

الحل:

إنّ العدد المطلوب هو الحل المشترك للتطابقات:

$$x \equiv \overset{0}{2}\ (\mathrm{mod}\ 6)$$
$$x \equiv \overset{0}{3}\ (\mathrm{mod}\ 5)$$
$$x \equiv \overset{0}{7}\ (\mathrm{mod}\ 11)$$

نلاحظ أنّ المقسوم 11, 5, 6 أولية نسبياً فيما بينها مثنى مثنى وجملة التطابقات حل وحيد. (حسب الباقي الصيني)

نكتب:

$$m = m_1 . m_2 . m_3 = (6)(5)(11) = 330 \Rightarrow M_1 = (5)(11) = 55,$$
$$M_2 = (6)(11) = 66, \quad M_3 = (6)(5) = 30$$

نوجد النظائر الضربية لـ M_1, M_2, M_3 حل التطابقات.

$$M_1 m_1' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6) \Rightarrow 55 m_1' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6)$$
$$M_2 m_2' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5) \Rightarrow 66 m_2' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$$
$$M_3 . m_3' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11) \Rightarrow 30 m_3' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$$

(بالترتيب)

$$m_1' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6)$$
$$m_2' \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$$
$$m_3' \equiv -4\ (\mathrm{mod}\ 11)$$

الحل المشترك للنظامية هو:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i m_i' M_i \pmod{330}$$

$$\equiv 2.(1)55 + 3(1)66 + 7(-4)(30) \pmod{330}$$
$$\equiv 110 + 198 - 840 = -532 \pmod{330}$$

$$x \equiv 128 \pmod{330}$$

مثال (2) صفحة 106 :

أوجد حل النظامية $19x \equiv 1 \pmod{140}$ باستخدام برهنة الباقي الصيني.

الحل:

لما كان $140 = (4)(5)(7)$ فإن النظامية المعطى يكافئ جملة النظامات:

$$\left.\begin{aligned} 19x &\equiv 1 \pmod 4 \\ 19x &\equiv 1 \pmod 5 \\ 19x &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod 4 \\ x &\equiv +4 \pmod 5 \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \end{aligned}\right.$$

والمقامات 4, 5, 7 أولية نسبياً مثنى مثنى ونعيد الحل إلى حالة نكتب:

$$M_1 = 35 \Rightarrow 35m_1' \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow m_1' \equiv -1 \pmod 4$$
$$M_2 = 28 \Rightarrow 28m_2' \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow m_2' \equiv 2 \pmod 5$$
$$M_3 = 20 \Rightarrow 20m_3' \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow m_3' \equiv -1 \pmod 7$$

نعوض في الحل:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i m_i' M_i \pmod{140}$$

$$x \equiv (-1)(-1)(35) + (4)(2)(28) + 3(-1)(20) \pmod{140}$$
$$x \equiv +35 + 224 - 60 \pmod{140}$$
$$x \equiv 199 \pmod{140} \Rightarrow x \equiv 59 \pmod{140}$$

مثال (3) صفحة 107 :

أوجد الحل المشترك لجملة التطابقات التالية:

$$x \equiv 10 \pmod{24}$$
$$x \equiv 50 \pmod{88}$$
$$x \equiv 28 \pmod{99}$$

الحل:

نلاحظ أن المقاسات غير أولية نسبياً مثنى مثنى أي أن:

$$24 = 3 \times 8 \quad , \quad 88 = 8 \times 11 \quad , \quad 99 = 9 \times 11$$

إن حل التطابقة الأولى يكافئ حل جملة التطابقين:

$$x \equiv 10 \pmod{24} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 10 \pmod{3} & (1) \\ x \equiv 10 \pmod{8} & (2) \end{cases}$$

كما أن حل التطابق الثاني يكافئ حل جملة التطابقين:

$$x \equiv 50 \pmod{88} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 50 \pmod{8} & (3) \\ x \equiv 50 \pmod{11} & (4) \end{cases}$$

وحل التطابقة الثالثة يكافئ حل جملة التطابقين:

$$x \equiv 28 \pmod{99} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 28 \pmod{11} & (5) \\ x \equiv 28 \pmod{9} & (6) \end{cases}$$

$$(1) + (6) \Rightarrow 10 \equiv 28 \equiv 1 \pmod{9}$$

الحل المشترك للمعادلة (6) + (1) هو $x \equiv 1 \pmod{9}$

$$(2) + (3) \Rightarrow 10 \equiv 50 \equiv 2 \pmod{8}$$

المعادلة (3) + (2) تكافئ التطابقة

$$x \equiv 2 \pmod{8}$$

$$(4) + (5) \Rightarrow 50 = 28 = 6 \pmod{11}$$

المعادلة (5) + (4) تكافئ التطابقة:

$x \equiv 6 \pmod{11}$

لهذه المعادلات الخطية تكافئ الجملة

$$x \equiv \overset{a_1}{1} \pmod 9$$
$$x \equiv \overset{a_2}{2} \pmod 8$$
$$x \equiv \overset{a_3}{6} \pmod{11}$$

9, 8, 11 أعداد أولية مثنى مثنى لأن PGCD مشترك بالمقاس

$$M = 9 \times 8 \times 11 = 792$$

$$M_1 = 88 \quad , \quad M_2 = 99 \quad , \quad M_3 = 72$$

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = 88 \\ M_2 = 99 \\ M_3 = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 88\, m_1' \equiv 1 \pmod 9 \\ 99\, m_2' \equiv 1 \pmod 8 \\ 72\, m_3' \equiv 1 \pmod{11} \end{array}$$

$$\Rightarrow m_1' \equiv 4 \pmod 9$$
$$m_2' \equiv 3 \pmod 8$$
$$m_1' \equiv 2 \pmod{11}$$

حل جملة التطابقات بالمقاس 792 هو

$$x \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i\, m_i'\, M_i \pmod{792}$$

$$\equiv 1 \times 4 \times 88 + 2 \times 3 \times 99 + 6 \times 2 \times 72 \pmod{792}$$
$$x \equiv 352 + 594 + 864 \pmod{792}$$
$$x \equiv 1810 \pmod{792} \equiv 226 \pmod{792}$$

ملاحظة:

$ax \equiv b \pmod m$ يقبل حل إذا كان $(a, m) = d$ و $d \mid b$

ملاحظة:

ليوجد لجملة التطابقات:

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

حل مشترك إذا وفقط إذا كان:

$$a_i \equiv a_j \pmod{d_{ij}}$$

حيث: $d_{ij} = (m_i, m_j)$ حيث $i = 1, 2, \cdots, k$ و $j = 1, 2, \cdots, k$ و $i < j$

وتسمى جملة التطابقات التي تحقق الشرط:

جملة منسجمة $a_i \equiv a_j \pmod{d_{ij}}$

انتهت المحاضرة ...