مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية إن القضايا التالية متكافئة

1- R حلقة محلية

2- $\exists\, I \triangleleft . R,\ a \in I,\ b \in R : 1 - ab \in U(R)$

ما في فرق إذا وضعنا (+)

3) $\exists\, I \triangleleft . R ;\ a \in I : 1 + a \in U(R)$

4) $S = R \setminus U(R) \trianglelefteq R$

الإثبات: $(2 \leftarrow 1)$ إذا كانت R حلقة محلية فإن حسب التعريف

$J(R) \triangleleft . R$

أي $\exists\, I = J(R) \triangleleft . R$ كيف $,\ a \in I,\ b \in R$

$1 - a.b \in U(R)$ حسب مبرهنة سابقة

$J(R)$ هو تقاطع كل المثاليات الأعظمية لذلك هو محتوى في أي مثالي أعظمي

$J(R) \subseteq I \qquad (1 \leftarrow 2)$

$\forall a \in I,\ b \in R : 1 - a.b \in U(R)$

$\Rightarrow a \in J(R) \Rightarrow I \subseteq J(R)$ حسب المبرهنة

$R \in I = J(R) \triangleleft . R$

ومنه R حلقة محلية

$\exists\, I \triangleleft . R,\ a \in I,\ b = -1 \in R \qquad (3 \leftarrow 2)$

إذن $1 + a = 1 - (-a) \in U(R)$

$\exists\, I \triangleleft . R,\ a \in I,\ b \in R \qquad (2 \leftarrow 3)$

$a.b \in I \Rightarrow -a.b \in I \Rightarrow 1 - ab \in U(R)$

لأنه مثالي $\in I$

$(4 \leftarrow 3)$ بدي اثبت S مثالي

$0 \notin U(R) \Rightarrow 0 \in S$

كل عناصر R ما عدا عناصر القابلة للعكس

$S \neq \phi$

$\forall x, y \in S$

نفرض جدلاً $x - y \notin S$

$x - y \in U(R) \Rightarrow \exists u \in R \overset{\text{بحيث}}{;} u(x-y) = 1$

((حسب فرضنة)) $1 = ux - uy$

كل مثالي γ سيادي الحلقة $x \in S \Rightarrow x \notin U(R) \Rightarrow \exists \gamma \, \Delta . R ;$

يوجد مثالي ((أعظمي يحويه)) $x \overset{\text{بحيث}}{\in} \langle x \rangle \subseteq \gamma \Rightarrow -xu \in \gamma$

$uy = \underbrace{1 - xu}_{\text{حسب } 3} \in U(R)$

إن! $y \in S \Rightarrow y \notin U(R) \Rightarrow \exists \gamma' \, \Delta . R$

$y \in \langle y \rangle \subseteq \gamma' \Rightarrow uy \in \gamma'$

$\Rightarrow \gamma' = R$

((المثالي لا يحوي عناصر قابلة للقلب)) وهذا تناقض كون γ' مثالي أعظمي ((المثالي الأعظمي γ يساوي كامل الحلقة))

وبالتالي $x - y \in S$

أول شرط في المثالي تحقق

لندرس الشرط الثاني : $x \in S , r \in R$

نفرض جدلاً :

$x . r \notin S \Rightarrow rx \in U(R)$

r الحلقة تبديلية فينا نكتب بدل xr rx

$\exists u \in R ; 1 = urx = (ur)x$

$\Rightarrow x \in U(R)$

وهذا تناقض كون $x \in \underset{R - U(R)}{S}$ ومنه الفرض الجدلي

خاطئ

ومنه $rx \in S$

ومنه S هو مثالي أعظمي

$(4 \Rightarrow 3)$ حسب تمرين سابق إذا كان S مثالي شبه مثالي أعظمي $(S \triangleleft . R)$

$\exists \ \mathcal{M} = S \triangleleft . R$ ((يكافئ [illegible]))

$\forall a \in \mathcal{M}$

نفرض جدلاً أن $1 + a . b \notin \mathcal{U}(R)$

$\Longrightarrow 1 + a \in S$

$1 = \underbrace{(1+a)}_{\in S} - \underset{\in S}{a} \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mathcal{M} = R$

وهذا تناقض

لأن $\mathcal{M}$ هو مثالي أعظمي فالفرض الجدلي خاطئ وبالتالي

$1 + a \in \mathcal{U}(R)$

$(4 \Rightarrow 1)$ حسب تمرين سابق بما أن S مثالي شبه مثالي أعظمي

$S \triangleleft . R \Longrightarrow J(R) \subseteq S$

نثبت الاحتواء المعاكس:

$\forall a \in S$ ((نفرض جدلاً أن $a \notin J(R)$))

حسب مبرهنة سابقة

$\Rightarrow 1 + a \notin \mathcal{U}(R)$

$\Longrightarrow 1 + a \in S$

$1 = (1 + a) - a \in S$

$\Rightarrow S = R$

وهذا غير ممكن وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ

ومنه $a \in J(R) \Rightarrow S \subseteq J(R)$.

مما سبق $S = J(R) \triangleleft . R$

$\Rightarrow$ محلية R

(1 ← 4) نريد أن أثبت S مثالي:

$0 \notin U(R) \Rightarrow 0 \in S \neq \emptyset$

$x, y \in S$

نفرض جدلا $x - y \notin S$

$\Rightarrow x - y \in U(R)$

$\exists u \in R = 1 = ux - uy$

$y, x \in S \Rightarrow y, x \notin U(R)$ ((وضعنا نفس الـ $\mathcal{M}$ لم نضع $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ لأنه لا يوجد غير مثالي واحد أعظمي))

$\Rightarrow \exists \mathcal{M} \triangle . R \; ; \; \langle x \rangle \subseteq \mathcal{M} = J(R)$

$\langle y \rangle \subseteq \mathcal{M} = J(R)$ لأنه حلقة محلية

$\underbrace{ux}_{\in J(R) = \mathcal{M}} = \underbrace{1 - uy}_{\in J(R)} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} = R$ هذا تناقض

$\in U(R)$

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ ومنه $x - y \in S$

$r \in R \; , \; x \in S$

$rx \notin S$ نفرض جدلا

$\Rightarrow rx \in U(R)$

$\Rightarrow \exists u \in R$

بحيث $1 = urx = (ur)x$

$\Rightarrow x \in U(R)$

وهذا يناقض كون $x \in S = R \setminus U(R)$ الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي $rx \in S$

ومنه $S \trianglelefteq R$

(الفصل الخامس)

>> الحلقات (الناظمة) الاقليدية

- التاليات الرئيسية و الناظمة ذات التحليل الوحيد <<

دائماً R حلقة تبديلية واحدية ابتداءً الآن لا داعي لذكر عكس ذلك

تعريف: R حلقة تبديلية واحدية ، $r,s \in R$

نقول أن r يقسم s إذا وفقط إذا كان

$$\exists\, u \in R : s = u.r$$

وبالتالي $\langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle$

$$((r/s \Leftrightarrow \exists\, u \in R : s = u.r \Leftrightarrow \langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle))$$

c- نقول أن r غير قابلة للتحليل في R إذا حقق

1) $0 \neq r \notin U(R)$

2) $r = u.t \,,\; u,t \in R \Rightarrow u \in U(R)$ إما

أو $t \in U(R)$

3) نسمي r أولي في R إذا وفقط إذا حقق:

أ) $0 \neq r \notin U(R)$

ب) $r \backslash u.t : u,t \in R \Rightarrow$ إما $r \backslash u$ أو $r \backslash t$

أو متوافقان

4) نقول أن r و s مترادفان (متشاركان) إذا وفقط إذا حقق:

$$\exists\, u \in U(R) : r = us$$

أو

$$\langle r \rangle = \langle s \rangle$$

الفهم:

$r = us \Leftrightarrow r \in \langle s \rangle \Leftrightarrow \langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle$

قابل للقلب

نضرب الطرفين بـ u^{-1}

$s = u^{-1}.r \Leftrightarrow s \in \langle r \rangle \Rightarrow \langle s \rangle \subseteq \langle r \rangle$

من الاحتوائين $\langle r \rangle = \langle s \rangle$

مثال: $R=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$: (1)

إن 2 عنصر أولي في R لكن

$2 = 2 \otimes 4 \notin U(R)$

$\notin U(R)$

إذن 2 قابل للتحليل في R الليس كل أولي يؤدي

إلى غير قابلية التحليل

2) لتكن R هي I.D و $r \in R$ عنصر أولي

في ID كل أولي غير قابل للتحليل

في R

قانون الاختصار موجود في ID

إذن r عنصر غير قابل للتحليل في R

وذلك لأن: r أولي

أ) $0 \neq r \notin U(R)$

مثال: إذا $\mathbb{Z}_6$ ليست منطقة تكاملية

ب) $r = u.t \quad , \quad u,t \in R$

$2.3 = 0.3$

إذن r تقسم $u.t$ — كل عنصر يقسم نفسه

إذا $2 \neq 0$

$r \backslash u.t \Rightarrow r \backslash u$ أو $r \backslash t$

نفرض أن $r \backslash u$

$\Rightarrow \exists s \in R : u = r.s$

استخدمنا ID هنا حيث اختصرنا r مع r

$r = u.t = r.s.t$

$\Rightarrow 1 = s.t \Rightarrow t \in U(R)$

حسب التعريف

$\Rightarrow$ r غير قابل للتحليل في R

3) لتكن $R = (\mathbb{Z}\sqrt{-3},+,\cdot)$ هي I.D

$P = 2 \in R$ عنصر غير قابل للتحليل في R

لكن P ليس أولي في R

(اثبات أن P ليس أولي)

$0 \neq P = 2 \notin U(R) = \{\mp 1\}$

$x = a + b\sqrt{-3} \quad , y = c + d\sqrt{-3} \in R$

نفرض $P \backslash x.y = (\underbrace{1+\sqrt{-3}}_{x})(\underbrace{1-\sqrt{-3}}_{y})$

نفرض جدلاً أن $P \backslash x$

$\Rightarrow \exists u \in R : x = P.u$

لكن $u = n + m\sqrt{-3} \in R$

$1 + 3 = x^2 = P^2 . u^2 = 4(n^2 + 3m^2)$

$4 = 4(n^2 + 3m^2)$

$1 = n^2 + 3m^2 \Rightarrow n = \pm 1 , m = 0$

$u = \pm 1 \Rightarrow x = \mp P = \pm 2$

$\Rightarrow 1 + \sqrt{-3} = \mp 2$

وهذا غير ممكن ومنه الفرض الجدلي خاطئ

بقي اثبات غير قابل للتحليل ، واضحة .

تمرين (1) : $R = \mathbb{Z}$ اثبت أن P غير قابل للتحليل في $R \Leftrightarrow P$ أولي في R

2) إذا كانت R حقل ، فإن f غير قابلة للتحليل في $R[X]$ إذا وفقط إذا كانت f عنصر أولي في $R[X]$

3) إذا كانت r , s عناصر غير قابلة للتحليل في R فإن r , s مترافقان

اسئلة عن المحاضرة السابقة :

لأنه لو كان $I \trianglelefteq R \not\Rightarrow I = R \subseteq R$

فقط للاستفسار

1) $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R \Rightarrow \sqrt{I} = \bigcap P$ لأن

$I \subseteq P \in Spec(R)$

ولو كان $I \trianglelefteq R$ فلا يمكن $I \subseteq P$

2) $\mathfrak{r} \in M = \{ J \triangleleft R \,;\, I \subseteq J$

$\forall n \in \mathbb{N} \,,\, x^n \notin J \}$

$\mathfrak{r} \subseteq \langle \mathfrak{m}, a \rangle \subseteq R$

$\mathfrak{r} \subsetneq \langle \mathfrak{r}, x \rangle \neq R$

$\mathfrak{r}$ عظمى في M وليس في R

تمرين: لتكن R حلقة غير صفرية تبديلية $(R \neq 0)$

إذا كان يتحقق

$\forall r \in R \,,\, n \in \mathbb{N} \,,\, n > 1 \,,\, r^n = r$

فإن :

$\mathfrak{r}\_Spec(R) = Spec(R)$

- بين فيما إذا كان العكس صحيح إذا تحقق

$\mathfrak{r}\_Spec(R) = Spec(R)$

إذا كان $P_1, P_2, \dots, P_n \trianglelefteq R$, $I \trianglelefteq R$

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

$$\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\}$$

$$I \subseteq P_j$$

بيّن أنه غير صحيح