أثبت صحة المتراجحة:

$$|d(x,y)-d(z,u)| \le d(x,z)+d(y,u)$$

في فضاء متري (X,d)

$$x,y,z,u \in X$$

الحل:

$*\quad d(x,y) \le d(x,z)+d(z,u)+d(u,y)$

$d(x,y)-d(z,u) \le d(x,z)+d(y,u)$

$**\quad d(z,u) \le d(z,x)+d(x,y)+d(y,u)$

$d(z,u)-d(x,y) \le d(x,z)+d(y,u)$

$-(d(x,y)-d(z,u)) \le d(x,z)+d(y,u)$

$\Rightarrow$

$$|d(x,y)-d(z,u)| \le d(x,z)+d(y,u)$$

$0<B$

$\alpha<B$

$-\alpha<B$

$\Rightarrow$

$|\alpha|<B$

ليكن (X,d) فضاء متري فيه $\{x_n\},\{y_n\}$ متتاليتان كوشيتان أثبت أن المتتالية $\{d(x_n,y_n)\}$ متقاربة في $\mathbb{R}$

الحل: من تعريف المتتالية الكوشية

$\{x_n\}$ كوشية $\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : m,n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$

$\{y_n\}$ كوشية $\Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : m,n \ge n_1 \Rightarrow d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$

وبما أن الفضاء $(\mathbb{R},|.|)$ تام، يكفي لإثبات تقارب

$\{d(x_n,y_n)\}$ أن نثبت أنها كوشية في $\mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N \in \mathbb{N} : m,n \ge N \Rightarrow$

$$|d(x_m,y_m) - d(x_n,y_n)| < \varepsilon$$

بالاستفادة من الفرض السابق

$$|d(x_m,y_m) - d(x_n,y_n)| \le d(x_m,x_n) + d(y_m,y_n)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وذلك من أجل $n,m \geq N = \max(n_0,n_1)$ ومنه

تكون المتتالية $\{d(x_n,y_m)\}$ كوشية في $(\mathbb{R},|\cdot|)$

التام فهي متقاربة في $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

إذا كان (X,d) فضاءاً متريا أثبت أن

$$\text{تام } (X,d_1) \Longleftrightarrow \text{تام } (X,d)$$

$$d_1 = \frac{d}{1+d}$$

الحل: $\Leftarrow$

ليكن (X,d) فضاء تام ولتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشية في (X,d)

وسنبين أنها متقاربة

بما أن $\{x_n\}$ كوشية في (X,d) إذن

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} \; ; m,n \geq N \Rightarrow d_1(x_n,x_m) < \varepsilon$$

فإذا كان $r>0$ عدد موجب صغير

$$\varepsilon = \frac{r}{1+r} > 0$$

$$\exists N\in\mathbb{N} \; , d_1(x_n,x_m) < \varepsilon = \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d(x_n,x_m)}{1+d(x_n,x_m)} < \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{r}{1+r} + \frac{r}{1+r} d(x_n, x_m)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{r}{1+r}\right) d(x_n, x_m) < \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{r+1}} d(x_n, x_m) < \frac{r}{\cancel{1+r}}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < r$$

إذن مهما أخذ $r > 0$ كيفي وجدنا $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n, m \in N \Rightarrow d(x_n, x_m) < r$$

إذن $\{x_n\}$ كوشي في الفضاء التام (X, d) إذن x_n

متقاربة في (X, d) من $x \in X$

$$\Rightarrow d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d_1(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow x_n \longrightarrow x$$

متقاربة في (X, d_1)

الاتجاه الآخر واضح.

إذا كان (X, d) فضاء متري و $A, B \subseteq X$

1. $A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \le \delta(B)$
2. $A \cap B \neq \phi \Rightarrow \delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B)$

$$\delta(A) = \delta(cl(A))$$ 3

الحل:

التذكير:

قطر المجموعة A $\delta(A) = \sup\{d(x,y);\ x,y \in A\}$

1 $d(x,y) \le \delta(B)$

$\forall x,y \in B \supseteq A$

$A \subseteq B$

$\Rightarrow \forall x,y \in A : d(x,y) \le \delta(B)$

$\Rightarrow \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y) \le \delta(B)$

$\delta(A) \le \delta(B)$

2 لنفرض $A \cap B \ni z$ ،

$x,y \in A \cup B$ ، لدينا ثلاث حالات:

$\boxed{1}$ $x \in A$ & $y \in A$ $\Rightarrow$

$d(x,y) \le \delta(A) \le \delta(A) + \delta(B)$

$\boxed{2}$ $x \in B$ & $y \in B$ $\Rightarrow$

$d(x,y) \le \delta(B) \le \delta(B) + \delta(A)$

$\boxed{3}$ $x \in A$ & $y \in B$ $\Rightarrow$

حسب متراجحة المثلث $d(x,y) \le d(\underset{\in A}{x}, \underset{\in A}{z}) + d(\underset{\in B}{z}, \underset{\in B}{y}) \le \delta(A) + \delta(B)$

حيث z نقطة التقاطع.

$\boxed{3}$ $x \in A$ & $y \in A \Rightarrow$

$$d(x,y) \le \underset{\text{ج}\ \text{ج}}{d(x,z)} + \underset{\text{ج}\ \text{ج}}{d(z,y)} \le \delta(B) + \delta(A)$$

$\forall x,y \in A \cup B$

$$d(x,y) \le \delta(A) + \delta(B)$$

$$\Rightarrow \sup_{x,y \in A\cup B} d(x,y) \le \delta(A) + \delta(B)$$

$$\delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B)$$

$D \subseteq \mathbb{R}$

$\sup D = t$

$\boxed{1}$ $\forall x \in D : x \le t$

$\boxed{2}$ $\forall \varepsilon > 0 :$

$\exists y \in D ;$

$t - \varepsilon < y$

$$\delta(A) \overset{?}{=} \delta(cl A) \quad ③$$

إذن

$$\delta(A) \le \delta(cl A) \overset{\text{صح}}{\Longleftarrow} A \subseteq cl A$$

ضايل نثبت ان

$$\delta(cl A) \le \delta(A)$$

مناخذ $\varepsilon > 0$ بحيث

$\exists x, y \in cl A :$

$$\delta(cl A) - \varepsilon < d(x,y)$$

بما ان $x \in cl(A)$ إذاً x نقطة ملاصقة لِ A ،

و $y \in cl(A)$ إذاً y نقطة ملاصقة لِ A .

$$\Leftarrow cl(A) \ni x,y$$

$\forall r > 0 :$ $N(x,r) \cap A \ne \phi$

$N(y,r) \cap A \ne \phi$

نأخذ $r = \varepsilon/4$

$\Rightarrow N(x, \varepsilon/4) \cap A \neq \phi$

$N(y, \varepsilon/4) \cap A \neq \phi$

ليكن $A \cap N(x, \varepsilon/4) \ni x_1$

$A \cap N(y, \varepsilon/4) \ni y_1$

$\Rightarrow x_1, y_1 \in A$

$d(x_1, x) < \varepsilon/4$

$d(y_1, y) < \varepsilon/4$

$\delta(d(A)) - \varepsilon < d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y_1) +$

$d(y_1, y)$

$\Rightarrow \delta(dA) - \varepsilon < \varepsilon/4 + \underbrace{d(x_1, y_1)}_{x_1, y_1 \in A} + \varepsilon/4$

$\delta(dA) - \varepsilon < \varepsilon/2 + \delta(A)$

$\Rightarrow \delta(dA) < 3\varepsilon/2 + \delta(A)$

وهذا $\varepsilon > 0$ كيفي

$\Rightarrow \delta(dA) \leq \delta(A)$

$\Rightarrow \delta(dA) = \delta(A)$

للمرة القادمة :

(1) اثبت أن اتحاد متراصتين في فضاء متري هو مجموعة متراصة. وأن تقاطع أسرة من المتراصات هو مجموعة متراصة.

(2) إذا كان (X, d) فضاء متري

$$\tau = \{\phi\} \cup \{\theta \subseteq X : X \setminus \theta \text{ متراصة}\}$$

τ طوبولوجيا على X.

(3) إذا كانت D كثيفة في فضاء متري (X,d) أثبت أن

$cl\, u = cl(u \cap D)$; حيث

u مجموعة مفتوحة في X.

(4) برهن أنه إذا كانت $\{F_n\}$ أسرة من المجموعات المغلقة غير الخالية

F_n في فضاء متري تام بحيث

$F_{n+1} \subseteq F_n \quad (\forall n)$

وكانت

$\lim_{n \to \infty} (\delta(F_n)) = 0$ فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ تحوي

نقطة واحدة فقط.