الأربعاء: 2015/5/13

المحاضرة الخامسة عشرة

"دراسة الدوال الخاصة" [كالتابع فوق الهندسي - دالة بسل - دالة لوجاندر]

تعريف معادلة فوكس:

هي المعادلة التفاضلية التي جميع نقاطها نقاط شاذة منتظمة واللانهاية شاذة منتظمة على الأكثر.

استنتاج معادلة فوكس:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية:

$$w'' + a(z)\, w' + b(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

والسؤال الذي يطرح نفسه:

كيف يكون شكل الدالتين $a(z)$ ، $b(z)$ في معادلة فوكس؟

لدينا:

$r_1, r_2, \dots, r_k$ نقاط شاذة منتظمة (معزولة) [أي يوجد جوار للنقطة لا تحوي نقاطاً شاذة أخرى باستثناء النقطة نفسها]

و ∞ شاذة منتظمة على الأكثر. [جوار اللانهاية هو عبارة عن خارج قرص كبير وجميع النقاط الشاذة تقع بداخله أي $|z| > R$]

بما أن:

أقطاب بسيطة لـ $a(z)$ على الأكثر ومضاعفة لـ $b(z)$ على الأكثر

$r_1, r_2, \dots, r_k$ نقاط شاذة منتظمة للمعادلة (1) عندئذٍ الدالة $a(z)$ تكتب بالشكل التالي:

$$a(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{(z - r_i)} + q(z) \qquad (2)$$ (حسب منشور لوران)

حيث β_i ثوابت و $q_1(z)$ تابع صحيح (تابع تحليلي ووحيد القيمة في $\mathbb{C}$) هذا من جهة،

من جهة ثانية: بما أن ∞ نقطة شاذة منتظمة فهي عبارة عن صفر من مرتبة الأولى على الأقل بالنسبة لـ $a(z)$، ومنه حدود هذا الشرط فإن $q_1(z)$ في (2) سوف تسعى إلى الصفر عندما $z \to \infty$ أي:

$$q_1(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 0$$

وبناءً على ذلك فإن:

$$a(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{(z - r_i)} \quad ; \quad \beta_i = \text{constant} \qquad (3)$$

ولكون $r_1, r_2, \ldots, r_k$ نقاط شاذة منتظمة فإن: انطلاقا من هذه تكتب لـ $b(z)$ الدالة $b(z)$ تكتب بالشكل:

$$b(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(z - r_i)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{c}_i}{(z - r_i)^2} + b_1(z) \quad \text{(حسب لوران)}$$

c_i ، $\bar{c}_i$ ثوابت كيفية.

ولأن ∞ نقطة شاذة منتظمة فهي صفر مرتبة ثانية على الأقل بالنسبة لـ $b(z)$ وتحقق:

$$b_1(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 0$$

ولكون ∞ هي صفر مرتبة ثانية على الأقل بالنسبة لـ $b(z)$ فإن الحدود من الدرجة الأولى ستكون معدومة: أي:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{z - r_i} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow b(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{(z - r_i)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{c}_i}{(z - r_i)^2} \qquad (5)$$

/ /

بشرط:
$$\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$$

نعوض في المعادلة:

$$w'' + \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{z-r_i}\right) w' + \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{z-r_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{c}_i}{(z-r_i)^2}\right) w = 0 \quad (6)$$

$w = w(z)$ و وذلك ضمن الشرط:
$$\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$$

ونسمي المعادلة (6) معادلة فوكس حيث $r_1, \dots, r_k$ هي نقاط الشاذة و ∞ هي نقطة شاذة منتظمة أما بقية النقاط في المستوي العقدي هي نقاط عادية.

تصنيف معادلات فوكس:

1 معادلة فوكس بنقطة شاذة وحيدة:
لتكن لدينا النقطة الشاذة الوحيدة هي $z = r_1$ (بينما جميع النقاط الأخرى وفيما بينها اللانهاية هي نقاط عادية)
وبالتالي نعوض في (6)

$$w'' + \frac{\beta_1}{z-r_1} w' + \left[\frac{c_1}{z-r_1} + \frac{\bar{c}_1}{(z-r_1)^2}\right] w = 0 \quad (7)$$

بشرط:
$$c_1 = 0 \quad (8)$$

لنفرض الثوابت: β_1 و $\bar{c}_1$
كون ∞ نقطة عادية:

$$z \cdot a(z) \longrightarrow 2$$
$$z \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_1 = 2} \quad ; \quad c_1 = 0$$

ولكي تتناسب المعادلة مع طبيعة اللانهاية، حيث ∞ هي نقطة عادية فهي صفر مرتبة رابعة بالنسبة لـ $b(z)$ على الأقل.

$$\Rightarrow \boxed{\bar{c}_1 = 0}$$

نعوض في (7)

$$\boxed{w'' + \frac{2}{z - r_1} w' = 0} \qquad (10)$$

وتسمى هذه المعادلة الأخيرة بمعادلة فوكس بنقطة شاذة وحيدة.

- لإيجاد حل هذه المعادلة نخفض رتبتها، ومن أجل ذلك نفرض:

$$w' = u \Rightarrow w'' = u'$$

نعوض في (10)

$$u' + \frac{2}{z - r_1} u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{-2}{z - r_1} dz$$

بالمكاملة:

$$\ln\left(\frac{u}{a_1}\right) = \ln\left(\frac{1}{(z - r_1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{a_1}{(z - r_1)^2} \quad ; \quad a_1 \text{ ثابت التكامل}$$

$$w' = u \Rightarrow w' = \frac{a_1}{(z - r_1)^2}$$

نكامل:

$$w = -\frac{a_1}{(z - r_1)} + a_2$$

$$\boxed{w = \frac{A}{(z-r_1)} + B} \quad ; A = -a_1 \ \& \ B = a_2$$

وهو يمثل حل المعادلة التفاضلية المفروضة.

2 معادلة فوكس بنقطتين شاذتين:

لتكن لدينا النقطتين الشاذتين:

$$z = \infty \quad , \quad z = r_1$$

بالعودة إلى المعادلة (6)

$$w'' + \frac{\beta_1}{(z-r_1)} w' + \left[\frac{c_1}{(z-r_1)} + \frac{\bar{c}_1}{(z-r_1)^2} \right] w = 0$$

بشرط $c_1 = 0$ نعوض هذا الشرط فتصبح:

$$w'' + \frac{\beta_1}{(z-r_1)} w' + \frac{\bar{c}_1}{(z-r_1)^2} w = 0$$

نضرب الطرفين بـ $(z-r_1)^2$

$$\boxed{(z-r_1)^2 w'' + \beta_1 (z-r_1) w' + \bar{c}_1 w = 0} \quad (11)$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي معادلة أولر أو معادلة فوكس بنقطتين شاذتين

$z = r_1$, $z = \infty$ وبقية النقاط هي نقاط عادية.

(وهذه المعادلة: هي معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال متحولة.)

ولحلها: نجري التحويل:

$$z - r_1 = e^t \Rightarrow t = \ln(z - r_1)$$

يُرد إلى معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة.

(وإيجاد الحل وظيفة)

3 معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة:

لتكن لدينا النقاط الشاذة هي:

$z = \infty \;,\; z = 0 \;,\; z = 1$ (وذلك دون المساس بعمومية المسألة)

بينما النقاط المتبقية هي نقاط عادية.

نعوض في (6)

$$(12)\quad w'' + \left[\frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{(z-1)}\right] w' + \left[\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{(z-1)} + \frac{\bar{c}_1}{z^2} + \frac{\bar{c}_2}{(z-1)^2}\right] w = 0$$

ضمن الشرط.

$$(13)\quad c_1 + c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = -c_1$$

هدفنا الآن هو التحسين في شكل الدالتين $a(z)$ أمثال w' و $b(z)$ أمثال w:

$$a(z) = \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{(z-1)}$$

نوحد المقامات:

$$(14)\quad a(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{z(z-1)} \quad ; \quad a_0 = -\beta_1 \;,\; a_1 = \beta_1 + \beta_2 \quad (15)$$

تحسين شكل الدالة $b(z)$:

$$b(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{(z-1)} + \frac{\bar{c}_1}{z^2} + \frac{\bar{c}_2}{(z-1)^2}$$

بتوحيد المقامات وتجميع الحدود نحصل على:

$$b(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2 (z-1)^2} \qquad (16)$$

$$(17) \; ; \quad b_0 = \bar{c}_1 \; , \; b_1 = c_1 - 2\bar{c}_1 \; , \; b_2 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 - c_1$$

نعوض (14) و (16) في (12):

$$w'' + \frac{a_0 + a_1 z}{z(z-1)} w' + \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2 (z-1)^2} w = 0 \qquad (18)$$

أو

$$(19) \; \boxed{z^2 (z-1)^2 w'' + (a_0 + a_1 z).(z)(z-1) w' + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2) w = 0}$$

وهي معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة وهي ∞, 1, 0 ويسمى هذا الشكل، الشكل غير المختزل للمعادلة.

نكتب المعادلات الدليلية للمعادلة (19) في جوار النقاط 0, 1, ∞:

أ- المعادلة الدليلية في جوار الصفر:

$$a_1(z) = z . a(z) = z . \frac{a_0 + a_1 z}{z(z-1)} = \frac{a_0 + a_1 z}{(z-1)}$$

ومن (15)

$$c_0 = a_1(0) = -a_0 \Rightarrow c_0 = \beta_1$$

$$b_1(z) = z^2 . b(z) = z^2 \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2 (z-1)^2}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{(z-1)^2}$$

ومنها (17)

$$b_1(0) = d_0 = b_0 \Rightarrow d_0 = \bar{c}_1$$

لنكتب المعادلة الدليلية الآن في جوار الصفر:

$$\lambda(\lambda-1) + c_0 \lambda + d_0 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + (\beta_1 - 1)\lambda + \bar{c}_1 = 0}$$

2- المعادلة الدليلية في جوار الواحد:

$$a_1(z) = (z-1)\, a(z)$$

$$= (z-1) \cdot \frac{a_0 + a_1 z}{z(z-1)} = \frac{a_0 + a_1 z}{z}$$

من العلاقة (15)

$$c_0 = a_1(1) = a_0 + a_1 \Rightarrow c_0 = -\beta_1 + \beta_1 + \beta_2$$

$$\Rightarrow c_0 = \beta_2$$

$$b_1(z) = (z-1)^2 b(z) = (z-1)^2 \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2 (z-1)^2}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{z^2}$$

من العلاقة (17)

$$b_1(1) = d_0 = b_0 + b_1 + b_2 = \bar{c}_1 - c_1 - 2\bar{c}_1 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 - c_1 = \bar{c}_2$$

$$\Rightarrow d_0 = \bar{c}_2$$

لنكتب الآن المعادلة الدليلية في جوار الواحد:

$$\lambda(\lambda - 1) + c_0 \lambda + d_0 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + (\beta_2 - 1)\lambda + \bar{c}_2 = 0}$$

3- المعادلة الدليلية في جوار ال ∞:

نجري التحويل:

$$z = \frac{1}{t}$$

نحسب المشتقات:

$$w' = -t^2 \frac{dw}{dt} \quad , \quad w'' = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d_2w}{dt^2}$$

نعوض في (19)

$$\frac{1}{t^2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \left(2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d_2w}{dt^2}\right) + \left(\frac{a_0 t + a_1}{t}\right) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right)\left(-t^2 \frac{dw}{dt}\right) + \left(\frac{b_0 t^2 + b_1 t + b_2}{t^2}\right) w = 0 \quad (20)$$

$$t^2 (1-t)^2 \frac{d_2w}{dt^2} + \Big\{[2(1-t) - a_0 t - a_1][t][1-t]\Big\} \frac{dw}{dt} +$$

$$[b_0 t^2 + b_1 t + b_2] w = 0 \qquad (20)$$

نقسم على أمثال w'':

$$\frac{d_2w}{dt^2} + \left\{\frac{[2(1-t) - a_0 t - a_1][t][1-t]}{t^2 (1-t)^2}\right\} \frac{dw}{dt} +$$

$$\frac{1}{t^2 (1-t)^2} [b_0 t^2 + b_1 t + b_2] w = 0$$

لدينا: $a_1(t) = t \cdot a(t)$

نستفيد من العلاقات (15) و (17) $c_0 = a_1(0) = 2 - a_1$

$d_0 = b_1(0) = b_2$

نكتب الآن المعادلة الدليلية:

$$\lambda(\lambda - 1) + c_0 \lambda + d_0 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2)\lambda + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 - c_1 = 0}$$

حصلنا على ثلاث معادلات دليلية لكل منها جذران:

نفرض أن: α_1, α_2 جذرا المعادلة الدليلية في جوار الصفر.

نفرض أن: b_1, b_2 جذرا المعادلة الدليلية في جوار الواحد.

نفرض أن: d_1, d_2 جذرا المعادلة الدليلية في جوار ∞

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 - \beta_1 \\ a_1 \cdot a_2 &= \bar{c}_1 \\ b_1 + b_2 &= 1 - \beta_2 \\ b_1 \cdot b_2 &= \bar{c}_2 \\ d_1 + d_2 &= \beta_1 + \beta_2 - 1 \\ d_1 \cdot d_2 &= \bar{c}_1 + \bar{c}_2 - c_1 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

نريد تحديد الثوابت في الطرف الأيمن $\beta_1, \beta_2, \bar{c}_2, \bar{c}_1, c_1$

لدينا: مجموع جذور المعادلات الدليلية يساوي الواحد:

$$\alpha_1 + a_2 + b_1 + b_2 + d_1 + d_2 = 1 \quad (22)$$

/ /

حساب الثوابت:

in (21) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 1-(a_1+a_2) \\ \beta_2 &= 1-(b_1+b_2) \\ \bar{c}_1 &= a_1 \cdot a_2 \\ \bar{c}_2 &= b_1 \cdot b_2 \\ c_1 &= a_1a_2+b_1b_2-d_1d_2 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

هذه هي الثوابت الموافقة لمعادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة - المعادلة (19) - حيث الشكل غير المختزل للمعادلة.

معادلة فوكس المختزلة بثلاث نقاط شاذة:

للحصول على معادلة فوكس المختزلة بثلاث نقاط شاذة، نجري التحويل:

$$w = z^{a} \cdot (1-z)^{b} \cdot u \quad ; \quad u=u(z)$$

u دالة مجهولة ،
a, b ثوابت كيفية

حيث أن هذا التحويل لا يؤثر على طبيعة النقاط الشاذة $\infty, 1, 0$ للمعادلة (19) وتبقى هذه النقاط نقاط شاذة منتظمة.

بحساب w' , w'' والتعويض في المعادلة (19) والإصلاح نحصل على:

$$z^2(z-1)^2u'' + (A+Bz)(z)(z-1)u' + (C+Dz+Ez^2)u = 0$$

where ;

$$A = a_0 - 2a$$

$$B = 2a + 2b + a_1$$

(التفصيل موجود بالكتاب)

$$C = a(a-1) - aa_0 + b_0$$

$$D = -2a(a-1) - 2ab + aa_0 - aa_1 + ba_0 + b_1$$

$$E = a(a-1) + b(b-1) + 2ab + a_1 a + b a_1 + b_2$$

لنكتب الآن المعادلة الدليلية في جوار الصفر:

$$\lambda(\lambda-1) + c_0\lambda + d_0 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - (A+1)\lambda + C = 0}$$

we have ; $A = a_0 - 2a$

$A + 1 = a_0 - 2a + 1$

$A + 1 = -\beta_1 - 2a + 1$ بالاستفادة من (15)

من (23)

$A + 1 = (a_1 + a_2) - 2a$

$\Rightarrow A + 1 = (a_1 - a) + (a_2 - a)$

هذا يعني أن الجذرين a_1 ، a_2 للمعادلة الدليلية أصبحا:

$a_1 - a$ & $a_2 - a$ (في جوار الصفر)

وبشكل مشابه:

الجذرين b_1 ، b_2 للمعادلة الدليلية يصبحان:

$b_1 - b$ & $b_2 - b$ (في جوار الواحد)

لإيجاد جذري المعادلة الدليلية في جوار الـ ∞:

نفرض أن a ، b هما جذرا المعادلة الدليلية:

بهدف التبسيط، نضع:

$a_1 = a$ & $b_1 = b$ (وهذا لا يؤثر على المسألة المطروحة)

فتصبح جذور المعادلات الدليلية كما يلي:

$$0 \quad , \quad a_2 - a_1$$
$$0 \quad , \quad b_2 - b_1$$
$$d \quad , \quad b$$

أيضاً نضع:

$$a_2 - a_1 = 1 - c$$

حيث c ثابتة كيفي غير معدوم عندئذٍ:

$$b_2 - b_1 = c - a - b$$

وذلك لكون مجموع جذور المعادلات الدليلية تساوي الواحد من (22)
ووفقاً لذلك تصبح المعادلات (23) كما يلي

$$\beta_1 = c \quad , \quad \beta_2 = 1 - c + a + b$$

$$\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0 \quad , \quad c_1 = -ab$$

بتعويض هذه المقادير في عبارة ال $a(z)$:

$$a(z) = \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z-1}$$
$$= \frac{c}{z} + \frac{1-c+a+b}{z-1}$$

$$\boxed{a(z) = \frac{-c + (1+a+b)z}{z(z-1)}}$$

نعوض في عبارة ال $b(z)$:

$$b(z) = \frac{\bar{c}_1}{z^2} + \frac{\bar{c}_2}{(z-1)^2} + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1}$$

بتوحيد المعاملات والتعويض عن الثوابت:

$$\boxed{b(z) = \frac{a.b}{z(z-1)}} \quad \text{و} \quad c_1 + c_2 = 0$$

نعوض في المعادلة التفاضلية (1) عن $a(z)$ و $b(z)$ بقيمته:

$$\boxed{z(z-1)\, w'' + [-c + (1+a+b) z]\, w' + a.b\, w = 0}$$

حيث a, b ثوابت.

وهو الشكل النهائي لمعادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة منتظمة والمسماة بمعادلة غوص أو المعادلة فوق الهندسية

سؤال امتحاني:

رد المعادلة التفاضلية إلى معادلة فوكس، ثم طبق ذلك على المثال التالي:

$$z^2(1-z)^2 w'' + z(1-z^2)\, w' + (1+z^2)\, w = 0$$

أي ردها إلى الشكل (6)

وما هي النقاط الشاذة لهذه المعادلة وما هي طبيعة كل منها؟

الحل:

نقسم على أمثال w'':

$$w'' + \frac{1+z}{z(1-z)}\, w' + \frac{1}{z^2(1-z)^2}\, w = 0$$

رد المعادلة التفاضلية إلى معادلة فوكس أي نكتب فقرة - اختبار معادلة فوكس -

- الصفر والواحد هي نقاط شاذة منتظمة وهو شاذة منتظمة على الأكثر.

نفرق الكسر:

$$w'' + \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{(1-z)}\right] w' + \left[\frac{2}{z} - \frac{2}{(z-1)} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-1)^2}\right] w = 0$$

where; $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $c_1 = 2$, $c_2 = -2$

$\bar{c}_1 = 1$, $\bar{c}_2 = 1$

وهو نفس شكل (6)

$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$

انتهت المحاضرة...