20../5/18

حل التمرين : أوجد الحل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين

$y_1 \Leftarrow \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2$ ---- (1)

$y_2 \Leftarrow \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2$ ---- (2)

$y_1' = 2y_1 + y_2 \Longrightarrow y_2 = y_1' - 2y_1$ ---- (*)

$y_2' = y_1'' - 2y_1'$ ---- (**)

نعوض من (*) و (**) بـ (2) نجد

$$y_1'' - 2y_1' = y_1 + 2(y_1' - 2y_1)$$

$$y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0$$

معادلة تفاضلية متجانسة خطية وذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية لحلها نأخذ المعادلة المميزة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

الحل العام هو

$$y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} \quad \text{--- (3)}$$

الحل الثاني للحصول عليه نتبع ما يلي : مشتق (3) نحصل عليه

$$y_2 = y_1' - 2y_1$$

$$y_2 = C_1 e^{x} + 3C_2 e^{3x} - 2C_1 e^{x} - 2C_2 e^{3x}$$

$$\Longrightarrow y_2 = -C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

• ملاحظات و طلبات إضافية ،،

إذا أردنا الحل الخاص من أجل قيم لـ C_1 و C_2 أي : $(C_1, C_2) = (0,1)$ مثلاً

$$\Longrightarrow y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{3x}$$

فيكون الحل هو $Y(y_1, y_2) = (e^{3x}, e^{3x})$

ويدعى بالحل الخاص

نستطيع الحصول على التكاملات الأولية بإيجاد قيمة كل من C_1 و C_2

$$y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$
$$y_2 = -C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

ثم الحصول على C_1 و C_2 من المعادلتين السابقتين أي:

$$C_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) e^{-3x}$$ بجمعهم نحصل على :

$$C_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) e^{-x}$$ بطرحهم نحصل على :

تمرين: أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين

$$(*) \cdots \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$$

$$(**) \cdots \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$$

هنا التكامل العام ويسمى الحل العام لا نتمكن من إيجاد الحل لأننا لا نستطيع عزل الحل y مع x ولا الحل z مع المتغير x

من $(*)$: $dy = dx - \frac{dx}{z} \Longrightarrow dy - dx = -\frac{dx}{z} \cdots ①$

من $(**)$: $dz = \frac{dx}{y-x} \cdots ②$

نضرب ① بـ $\frac{1}{y-x}$: $\frac{dy - dx}{y-x} = \frac{-dx}{z(y-x)} \cdots$

نضرب ② بـ $\frac{1}{z}$: $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{z(y-x)}$ بالجمع نحصل على

$$\frac{dy - dx}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0$$

$$\ln|y-x| + \ln|z| = \ln|C_1| \Rightarrow C_1 = z(y-x)$$ تكامل أولي أول

من التكامل الأولي الأول : $z = \frac{C_1}{y-x} \xrightarrow{\text{نعوض في } (*)} dy - dx = -\frac{(y-x)\,dx}{C_1}$

$$\Rightarrow \frac{dy - dx}{y-x} = \frac{-dx}{C_1}$$

$$\Rightarrow \ln|y-x| = -\frac{x}{C_1} + C_2$$

$$\Rightarrow y - x = e^{-x/C_1} \cdot \underbrace{e^{C_2}}_{C_3} = C_3 e^{-x/C_1}$$

$\Rightarrow C_3 = (y-x)e^{x/y_1} \Rightarrow C_3 = (y-x)e^{1/(y-x)z}$ [illegible]

تمرين: أوجد حل جملة المعادلات التفاضلية بطريقة الحذف

$① \ldots \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z \ldots y'$

$② \ldots \dfrac{dz}{dx} = 2y - z \ldots z'$

من ① : $y' = 3y - 2z \Rightarrow z = \frac{1}{2}(3y - y')$

$y'' = 3y'' - 2z'$
$= 3(3y - 2z) - 2(2y - z)$
$= 9y - 6z - 4y + 2z$
$= 5y - 4z$
$= 5y - 4(\frac{1}{2}(3y - y'))$
$= 5y - 2(3y - y')$
$= -y + 2y' \Rightarrow y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda = 1$ جذر مضاعف

وبالتالي الحل العام من الشكل

$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$
$y = (C_1 x + C_2) e^x$

لحساب z بعد اشتقاق y

$y' = C_1 e^x + C_1 x e^x + C_2 e^x$

نعوض في z بـ

$z = \frac{1}{2}[3(C_1 x + C_2 x)e^x - C_1 e^x - C_1 x e^x - C_2 e^x]$
$= \frac{1}{2}(2C_1 x + 2C_2 - C_1) e^x$
$= (C_1 x + C_2 - \frac{1}{2} C_1) e^x$

حول: أوجد حل جملة المعادلات التفاضلية التالية

$$y' : \frac{dy}{dx} = z$$

$$z' : \frac{dz}{dx} = u$$

$$u' : \frac{du}{dx} = u + z - y + x - 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(1 نشتق} & y'' = z' \\ \text{(2 من} & z' = u \end{array}\right\} \Rightarrow y'' = u$$

نشتق

$$\left.\begin{array}{l} y''' = u' \\ \text{3 من} : u' = u + z - y + x - 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y''' = u + z - y + x - 1$$

$$y''' = y'' + y' - y + x - 1$$

$$\Rightarrow y''' - y'' - y' + y = x + 1$$

معادلة تفاضلية خطية بأمثال ثابتة غير متجانسة/ أحلها على الطالب ١

وانتهت المحاضرة.

وانتهى المقرر كله