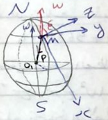
مثال: ادرس تأثير دوران الارض على سقوط الاجسام

الحل:



لندرس السقوط الحر لنقطة مادية ثقيلة M على سطح الكرة الارضية من ارتفاع صغير بالمقارنة مع نصف قطر الكرة الارضية حيث تؤثر على هذه النقطة قوة ثقالتها فقط وسوف نهمل مقاومة الهواء. لنأخذ جملة إحداثية متحركة مع الارض فيها المحور oz شاقولي صاعد والمحور ox مماس لقوس طول ومتجه نحو الجنوب والمحور oy مماس لخط عرض ومتجه نحو الشرق وبالتالي: لندرس حركة سقوط الجسم بالنسبة للجملة الاحداثية السابقة. يجب أخذ قوة عطالة الجرية والنسبية بعين الاعتبار وكذلك قوة الثقالة. إن شدة قوة العطالة الجرية

$$J_e = m\omega^2 r$$

ذلك لأن دوران الأرض حول محورها يتم بسرعة زاوية ثابتة ω و r هو بعد الجسم عن محور الدوران. وبما أن التسارع الجري عامودي على محور الدوران ومتجه نحوه إذاً قوة العطالة الجرية عمودية على محور الدوران وتأخذ الاتجاه المعاكس للتسارع الجري

إن دوران الأرض حول محورها يتم بسرعة دورة واحدة
خلال 23 ساعة و 56 دقيقة و 4 ثواني
وبالتالي نلاحظ من ذلك أن $\omega = \dfrac{2\pi}{23\times 60\times 60 + 56\times 60 + 4} \simeq 0{,}0002$ (صغيرة)
يتبين من ذلك صغر قيمة المطالة الجرية فهذه القوة
تتناسب طرداً مع مربع w^2 وبما أن w ثابتة
وقوة المطالة تبلغ قيمتها العظمى عند خط الاستواء
وبالتالي نلاحظ أن الفرق بين قوة الثقالة
وبين المجموع $P + Je$ يكون مقدار صغير جداً وبالتالي
يمكن إهمال قوة المطالة الجرية أمام قوة الثقالة
(لماذا نهمل قوة المطالة الجرية ؟)
وبالتالي يبقى لدينا قوة المطالة المتممة

البرهان العملي:
حسب معادلات الحركة النسبية:

$$m\Gamma_r = F + Je + Jc$$

$$\boxed{m\vec{\Gamma}_r = \vec{F} + \vec{Je}}$$

بالإسقاط على المحاور

$$m x'' = -m\,\Gamma_{cx}$$
$$m y'' = -m\,\Gamma_{cy}$$
$$m z'' = -mg - m\,\Gamma_{cz}$$

نقسم على m

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -\Gamma_{cx} \\ y'' &= -\Gamma_{cy} \\ z'' &= -g - \Gamma_{cz} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

نعلم أن :

$$\Gamma_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{V_r})$$

$$= 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

وبالتالي لدينا :

$$\omega_x = -\omega\cos\varepsilon$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = \omega\sin\varepsilon$$

وذلك إذا اعتبرنا أن ε هي زاوية العرض للنقطة M المحصورة بين محور الدوران ومماس خط الطول

ومنه

$$= 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\omega\cos\varepsilon & 0 & \omega\sin\varepsilon \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

ومنه نجد أن

$$\Gamma_{cx} = -\omega\sin\varepsilon \cdot y'$$

$$\Gamma_{cy} = 2\omega(\cos\varepsilon \cdot z' + \sin\varepsilon \cdot x')$$

$$\Gamma_{cz} = -2\omega\cos\varepsilon \cdot y'$$

نبدل في 1

$$x'' = 2\omega\sin\varepsilon \cdot y'$$

$$y'' = -2\omega(\cos\varepsilon \cdot z' + \sin\varepsilon\, x')$$

$$z'' = -g + 2\omega\cos\varepsilon \cdot y'$$

عوضنا في معادلة الحركة

نكامل

$$x' = 2\omega\sin\varepsilon \cdot y + c_1$$

$$y' = -2w(\cos\varepsilon \cdot z + \sin\varepsilon) + c_2$$
$$z' = -gt + 2w\cos\varepsilon \cdot y + c_3$$

$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = 0 \\ x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$(2)\begin{cases} x' = 2w\sin\varepsilon \cdot y \\ y' = -2w(\cos\varepsilon \cdot z + \sin\varepsilon \cdot x) \\ z' = -gt - 2w\cos\varepsilon \cdot y \end{cases}$$

لإيجاد قانون الحركة نتبع طريقة التقريبات المتتالية:

(لانها معادلات تفاضلية جزئية)

نعوض $w=0$ (التقريب الصفري)

$$x' = 0 \quad , y' = 0 \quad , z' = -gt$$

بالمكاملة نجد:

$$x = b_1 \quad , y = b_2 \quad , z = -\frac{1}{2}gt^2 + b_3$$

حسب شروط البدء نجد: أن

$$x = 0 \quad , y = 0 \quad , z = -\frac{1}{2}gt^2$$

معادلات الحركة بالتقريب الصفري

(قانون سقوط الأجسام الحر)

لإيجاد قانون الحركة في التقريب الأول:

نبدل (3) في (2)

$$x' = 2w\sin\varepsilon \cdot (0)$$
$$y' = -2w\left(\cos\varepsilon\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\right)$$

$$z' = -gt + 2w \cos\varepsilon (0)$$

ومنه

$$x' = 0 \ , \ y' = wg\,t^2 \cos\varepsilon$$
$$z' = -gt$$

بالمكاملة:

$$x = D_1 \quad , y = \frac{1}{3} g t^3 \cos\varepsilon + D_2$$
$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + D_3$$

ومن شروط البدء:

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \frac{w}{3} g t^3 \cos\varepsilon \\ z &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} (4$$

لما كانت ε زاوية حادة و $y>0$ فإن النقطة المادية الثقيلة الساقطة ستنحرف نحو الشرق وهذا الانحراف يتناسب مع w بالإضافة إلى أنه يتناسب مع مكعب الزمن الذي تستغرقه النقطة في سقوطها وهذ الزمن يحسب من المعادلة $z = -\frac{1}{2} g t^2$ (3) ، ثم (4)

لإيجاد معادلات الحركة في التقريب الثاني
نعوض (4) في (2)

$$x' = w \sin\varepsilon \cdot \left[\frac{w}{3} g t^3 \cos\varepsilon \right]$$
$$y' = -2w \left[\cos\varepsilon \left(-\frac{1}{2} g t^2 + \sin\varepsilon (0)\right)\right]$$

$$z' = -gt + 2w \cos\varepsilon \cdot \left[\frac{w}{3} g t^3 \cos^3\varepsilon \right]$$

$$x' = \frac{2}{3} \omega^2 g t \sin\varepsilon . \cos\varepsilon$$

$$y' = \omega g t^2 \cos\varepsilon$$

$$z' = -gt + \frac{2}{3} \omega^2 t^3 g \cos^2\varepsilon$$

بالمكاملة:

$$x = \frac{1}{6} \omega^2 g t^4 \sin\varepsilon . \cos\varepsilon + k_1$$

$$y = \frac{\omega g}{3} t^3 \cos\varepsilon + k_2$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{6} \omega^2 t^4 g \cos^2\varepsilon + k_3$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

وتكون قد حصلنا على التقريب الثاني :

نظرية الطاقة الحركية والحركة النسبية:

بما أن معادلة التحريك للحركة النسبية لا تختلف عن معادلة التحريك العامة إلا بوجود الحدين قوة العطالة الجرية وقوة العطالة المتممة وبالتالي النظريات العامة في التحريك تبقى صحيحة بالحركة النسبية إذا ما أضفنا القوى الخارجية المؤثرة على النقطة قوى عطالتي الجرية والمتممة

مثلاً لدينا : نظرية كمية الحركة

$$d(mv) = F.dt \quad , (v = v_a)$$

$$d(mv) = F.dt + J_e dt + J_c dt$$
$$(v = v_r)$$

الطاقة الحركية $\quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\,dr \quad ; (v = v_a)$

الحالة النسبية فتكون هنا في الشكل التالي

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c.dr$$

لأن الحد :

$$J_c.dr = -2m(w \times V_r)\,dr$$
$$= -2m\left(w \times \frac{dr}{dt}\right)dr$$

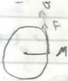
$$\frac{dr}{dt} \parallel dr$$

$$J_c dr = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e dr}$$

أي أن العمل الجزئي للحركة النسبية = العمل الجزئي للقوة المؤثرة على النقطة المادية بالاضافة للعمل الجزئي لقوى عطالة الجر.

مثال: يدور الالكترون حول نواته بمسار دائري وبسرعة ثابتة v. أثرنا على هذا الالكترون بقوة مماسية للمسار ، ... ، المطلوب تعيين السرعة الواجب تطبيقها على الالكترون لكي يفلت من جاذب النواة . ... حوله .



الحل:

$$v^2 = c^2(u'^2 + u^2)$$

$$u = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$$

$$u' = \frac{-e\sin\theta}{p}$$

$$v^2 = c^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{p^2} + \frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2}\right]$$

$$v^2 = c^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{p^2} + \frac{1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{p^2}\right]$$

$$= c^2\left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{1 + 2e\cos\theta}{p^2}\right]$$

$$v^2 = \frac{c^2}{p}\left[\frac{e^2 - 1}{p} + \frac{2}{r}\right]$$

$$e = 0 \ , \ p = r$$

$$v^2 = \frac{c^2}{p}\left[\frac{-1}{r} + \frac{2}{r}\right] = \frac{c^2}{p}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\boxed{v_n^2 = \frac{c^2}{pr}}$$

$$e = 1$$

$$v^2 = \frac{c^2}{p}\left(\frac{2}{r}\right) \longrightarrow \boxed{v_c^2 = \frac{2c^2}{pr}}$$

نرى ما العلاقة بين v_n^2 و v_c^2