Time Appointment Notes

المحاضرة الثامنة عشر

* حل جملة معادلات تفاضلية عادية

لتكن مجموعة معادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

$$(1)\begin{cases} \varphi_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n, y'_1, y'_2, \dots y'_n) = 0 \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots y'_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots y'_n) = 0 \end{cases}$$

حيث x المتحول المستقل و $(y_1, y_2, \dots y_n)$ دوال مجهولة في المتحول المستقل

تسمى بـ "جملة معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الأولى"

• اذا كانت الجملة (1) قابلة للحل بالنسبة للمشتقات الدوال نكتبها بالشكل التالي

$$(2)\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = h_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = h_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases}$$

تسمى جملة تفاضلية نظامية من المرتبة "

ويمكن كتابتها بالشكل العام:

$$(3) \dots \quad \frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, y_2, \dots y_n) \quad ; i = 1, 2, 3, \dots n$$

19 Sunday

أو بالشكل حيث

$$\frac{dy_i}{dh_i} = dx$$

$$\frac{dy_1}{dh_1} = \frac{dy_2}{dh_2} = \dots = \frac{dy_n}{dh_n} = dx$$

و لنعرف المتجه

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots y_n)$$

$$H = (h_1, h_2, h_3, \dots h_n)$$

نكتب الجملة (3) بدلالة المتجهين : $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$

ملاحظة: اذا كانت الجملة (1) نظامية وخطية بالنسبة للدوال $\frac{dy}{dx}$ تكون خطية في الدوال h ونكتب (3)

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + g_i(x)$$

تعريف: نقول عن مجموعة الدوال

$$(5) \dots \begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x) \end{cases}$$

المستمرة والقابلة للاشتقاق في مجال ما

إنها حل لجملة المعادلات الخطية (3) في ذلك المجال

واذا حققت مجموعة المعادلات أي مجموعة

متطابقات من أجل هذه الدوال

وذلك مساوٍ لحل جميع المعادلات التي تقع ضمن هذا المجال أي أن:

إما : $\frac{dy_i}{dx} = h_i$

أو : $\frac{dy_i}{dh_i} = dx$

وبهذا يكون الحل $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ بالفضاء النوني $\mathbb{R}^n$ حيث x يلعب دور الوسيط

ملاحظة: إن حل جملة المعادلات (1) يعني إيجاد كل المنحنيات في $\mathbb{R}^n$ التي تمس في كل نقطة منها متجهة الحقل $H = (h_1, h_2, \dots h_n)$ في تلك النقطة والتي تدعى بالمنحنيات التكاملية

مثال: أوجد حل جملة المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

المتحول المستقل هو x . الدوال المجهولة هي y, z

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Longrightarrow y\,dy - x\,dx = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = C_1$$

$$y = \sqrt{x^2 + C_1} \Longleftarrow \boxed{y^2 - x^2 = C_1}$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Longrightarrow dz = 0 \Longrightarrow \boxed{z = C_2}$$

$$\boxed{Y(y, z) = \left(\sqrt{x^2 + C_1}\ ,\ C_2\right)}$$

مثال: أوجد حل المعادلة التالية

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{dz}{dx} = 1$$

المتحول المستقل هو x

الدوال المجهولة y, z

أي هو عبارة عن
حزمة مستقيمات
توازي المنصف الأول

$$dy = dx \Longrightarrow y = x + C_1$$

$$dz = dx \Longrightarrow z = x + C_2$$

$$\Longrightarrow Y(y, z) = (x + C_1\ ,\ x + C_2)$$

$C_1 = y - x$, $C_2 = z - x$

لتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة كيفية :

$$C_1 = y_0 - x_0$$

$$C_2 = z_0 - x_0$$

ومنه المنحنيات :

$$y = x - x_0 + y_0$$

$$z = x - x_0 + z_0$$

* الشكل التناظري لجملة المعادلات التفاضلية

لتكن الجملة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$$

فالشكل التناظري هو :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

مثال: أوجد الحل لجملة المعادلات التالية

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y} \to Q \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{xz}{y} \to R \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{-x} &= \frac{dx}{y} \to P \\ \frac{dz}{xz} &= \frac{dx}{y} \to P \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نفس بعض

الشكل التناظري

$$\frac{dy}{-x} = \frac{dx}{y} = \frac{dz}{xz}$$

① ② ③

① = ②

$$y\,dy + x\,dx = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 = C_1$$

① = ③

$$-dy = \frac{dz}{z} \Rightarrow -y = \ln(z) + \ln C_2 \Rightarrow y = \frac{e^{-z}}{C_2}$$

$$Y(y, z) = \left(\sqrt{C_1 - x^2}\,,\ \frac{e^{-z}}{C_2}\right)$$

مسائل: أوجد الحل العام للمعادلات التالية

$$(z-y)^2\frac{dy}{dx} = z$$

$$(z-y)^2\frac{dz}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{z} = \frac{dx}{(z-y)^2}$$

$$\frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z-y)^2}$$

$$\underset{①}{\frac{dy}{z}} = \underset{②}{\frac{dx}{(z-y)^2}} = \underset{③}{\frac{dz}{y}}$$

من ③ و ①

$$y\,dy - z\,dz = 0 \implies y^2 - z^2 = c_1$$

② - ③ = ②

$$\frac{dy - dz}{z-y} = \frac{dx}{(z-y)^2}$$

$$d(y-z) = \frac{dx}{z-y} \implies -(y-z)\,d(y-z) = dx$$

$$-\frac{1}{2}(y-z)^2 = x + C_2$$

$$\implies (y-z)^2 = -2x - 2C_2$$

$$\therefore (y,z) = \left(y^2 - z^2 = c_1,\ (y-z)^2 = -2x - 2C_2\right)$$

وظيفة

أوجد الحل العام لجملة المعادلات

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2$$