المحاضرة السادسة عشرة　　　الاثنين ٤/١٠/٢٠١٠م

مقدمة في نظرية القياس

- مفاهيم في نظرية المجموعات.
- مفاهيم أساسية في الطوبولوجيا.
- أساسيات في نظرية القياس.

- مفاهيم أساسية في نظرية ~~...~~ المجموعات:

المجموعة: هي وعاء يحتوي (يشمل) على عدة أشياء وأي شيء يسمى عنصراً في المجموعة. ونرمز لها بـ $A, B, \ldots$

تمثيل المجموعة:

1 - طريقة القائمة: سرد جميع عناصر المجموعة.

$A = \{1, 2, \ldots, 5, 6\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

2 - طريقة القاعدة: $B = \{x \,;\, x \in \mathbb{N} : x \bmod 6 \equiv 0\} = \{1, 2, 3, 6\}$

3 - طريقة مخططات فن:

بعض الرموز التي تستخدم للعلاقات بين العناصر والمجموعة:

رموز بين المجموعة والعناصر: $\in$ $\notin$

رموز بين المجموعة ومجموعة أخرى: $\subseteq$ $\subset$ $\not\subseteq$ $\not\subset$ $=$

أمثلة: $3 \in \{1,3\}$　　$\{1\} \subseteq \{1,3\}$

$\{1,3\} \subseteq \{1,3\}$　　$4 \in \{1,3\}$

$\{1,3\} = \{1,3\}$

نقاط رئيسية في المجموعات :

- الخالية $\emptyset$: محتواة في أي مجموعة "أثبت ذلك" وهي وحيدة

- قدرة مجموعة : هي عدد عناصر هذه المجموعة

- مجموعة القوة لمجموعة : هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية

مثال : $X=\{1,2\}$

$P(X)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(X) = 2^{|X|} = ٤$

مثال : $X=\{1,2,3\}$

$|P(X)| = 2^{|X|} = 2^3 = 8$

وعندها يكون: $\tau=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

$\Rightarrow \tau \subseteq P(X)$

$\{1\} \in \tau \ , \ \emptyset \in \tau \ , \ \{\emptyset, \{1\}\} \subseteq \tau$

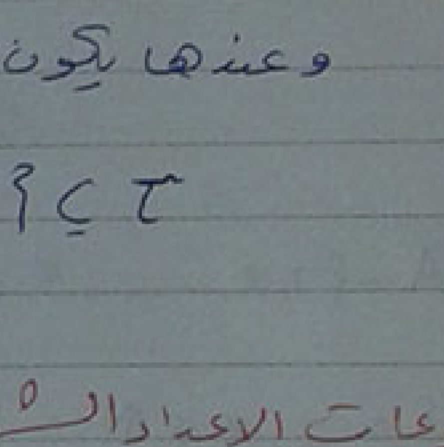
$\{\emptyset, \{1\}\} \subseteq P(X)$

مجموعات الأعداد الشهيرة: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات:

- العمليات على المجموعات: $\cup \ , \ \cap \ , \ \setminus \ , \ \Delta \ , \ ^c$

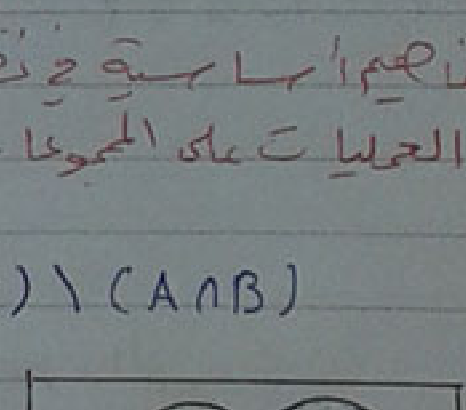
$\boxed{1}$ $A \Delta B = (A\setminus B) \cup (B \setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$



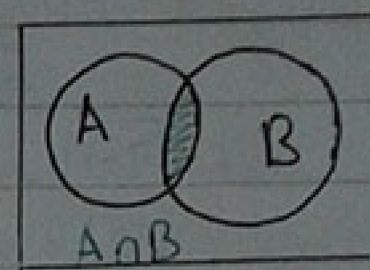
$\boxed{2}$ $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$
$(B\cup B)^c = A^c \cap B^c$ } دومرغان

$\boxed{3}$ $A\setminus B = A\cap B^c$

$A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$
$=(A\cup B)\Delta B$



$\boxed{4}$ $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$



$\boxed{5}$ $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

$A \cup B = A \Delta (B \setminus A)$

$\boxed{6}$ $A \cup A^c = X \quad , \quad A \cap A^c = \emptyset$

ملاحظة: إن مجموعة القوة لمجموعة $P(X)$ مغلقة بالنسبة لجميع العمليات (على المجموعات)

مثال: $X = \{a, b\} \Leftarrow P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

مفاهيم أساسية في الطوبولوجيا:

تعريف الطوبولوجيا: $X \neq \emptyset$ و τ مجموعة من أجزاء X
نقول عن τ أنها تشكل طوبولوجيا على X إذا تحقق:

1/ $\emptyset, X \in \tau$

2/ $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

3/ $\forall A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ "اجتماع كيفي"

ملاحظات:

١- كل عنصر من عناصر τ يسمى مجموعة مفتوحة.

٢- متمم كل مجموعة مفتوحة في τ مجموعة مغلقة وبالعكس.

٣- X ، $\emptyset$ مجموعتان مغلقتان ومفتوحتان بآن واحد.

٤- الطوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$ هي جميع المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$

٥- كل مجال مفتوح هو مجموعة مفتوحة في طوبولوجيا $\mathbb{R}$ المألوفة ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

أمثلة:

$\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ (التافهة) تمثل طوبولوجيا $\tau_2 = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ تمثل طوبولوجيا

$\tau_3 = P(X)$ تمثل طوبولوجيا (المتقطعة)

وإذا كان $X = \{1,2\}$ فإن:

$\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ لا تمثل طوبولوجيا $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ تمثل طوبولوجيا

انتهت المحاضرة...