الحادية عشر ١٣ / ٤ / ٢٠١٥

توزيع مجموع عناصر العينة: إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإنه بحسب مبرهنة سابقة

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإنه بحسب مبرهنة النهاية المركزية عندما n كبيرة يكون

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad ; \quad Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

تمرين: يتوزع وزن أمتعة المسافر جواً وفق التوزيع الطبيعي (20) كغ وانحراف معياري (5) كغ ويتسع نوع من الطائرات لـ (100) راكب ما هو احتمال أن يتجاوز الوزن الكلي لأمتعة المسافرين (2150) كغ.

الحل: إن أوزان أمتعة 100 مسافر هي عينة عشوائية لمتغير عشوائي $X \sim N(20, 25)$ لأن $\mu = 20$ و $\sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$ وبالتالي يكون

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \quad ; \quad Y \sim N(n\mu, n\sigma^2) = N(2000, 2500)$$

$$\Rightarrow \mu_Y = 2000, \quad \sigma_Y^2 = 2500 \Rightarrow \sigma_Y = 50$$

والاحتمال المطلوب هو:

$$p(Y \geq 2150) = 1 - p(Y \leq 2150)$$

$$p(Y \geq 2150) = 1 - p\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{2150 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

للمعايرة نضع $Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$ فيكون $Z \sim N(0,1)$ ومنه

$$p(Y \geq 2015) = 1 - p(Z \leq 3) = 1 - \phi(3)$$

$$p(Y \geq 2150) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

تمرين: في عيادة أحد الأطباء (36) مريضاً وقد بدأ باستقبالهم في الخامسة مساءً ففي أي ساعة سيكون متأكد 99 % من أنه سينهي عمله إذا كان يعلم من خبرته السابقة أن متوسط الزمن اللازم لمقابلة كل مريض هو (6) دقائق وبانحراف معياري قدره دقيقتين.

الحل: ننظر إلى أزمنة مقابلات المرضى ال 36 على أنها عينة عشوائية حجمها $n = 36$ لمتغير عشوائي متوسطه $\mu = 6$ وانحرافه المعياري $\sigma = 2$ وبما أن حجم العينة $n = 36 > 30$ فيمكن تطبيق مبرهنة النهاية المركزية فيكون:

$$\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4 \quad , \mu = 6 \quad , n = 36$$

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{36} X_i \quad : Y \sim N(n\mu, n\sigma^2) = N(216, 144)$$

$$\Rightarrow \sigma_Y^2 = 144 \Rightarrow \sigma_Y = 12 \quad , \mu = 216$$

نعين y بحيث نأخذ $(Y < y)$ لأنه تريد الزمن الأقل اللازم للمقابلة

$$p(Y < y) = 0.99 \Rightarrow p\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{y - 216}{12}\right) = 0.99$$

للمعايرة نضع $Z = \dfrac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$ فيكون $Z \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow p(Y < y) = p\left(Z \leq \frac{y - 216}{12}\right) = \phi\left(\frac{y - 216}{12}\right) = 0.99$$

نأخذ القيمة الأقرب في جدول التوزيعات من القيمة 0.99 فنجد:

$$\phi\left(\frac{y - 216}{12}\right) = \phi(2.33) \Rightarrow y = (12)(2.33) + 216$$

$$y = 243.96 \simeq 244 \text{ دقيقة}$$

الزمن اللازم لمقابلة 36 مريضاً باحتمال 0.99 هو 4 ساعات و 4 دقائق إذا بدأ العمل في الخامسة فسوف ينتهي في التاسعة و 4 دقائق.

توزيع الإحصاء $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

• مبرهنة: إذا كان $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة عشوائية من الحجم (n) للتوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

(البرهان غير مطلوب ولكنها مطلوبة نصاً وتطبيقاً)

1 $\bar{X}$ و s^2 متغيران عشوائيان مستقلان.

2 للمتغير العشوائي $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ توزيع كاي مربع بدرجة حرية $(n-1)$

* مبرهنة:

إذا كان $\bar{X}$ و s^2 متوسط وتباين عينة عشوائية من الحجم (n) للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإنه يكون للمتغير العشوائي $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ توزيع T - ستيودنت بدرجة حرية $(\nu=n-1)$ أي

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \quad : T\sim t(n-1)$$

الإثبات: بملاحظة أن للمتغير العشوائي $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ توزيع طبيعي معياري

وأن للمتغير العشوائي $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ توزيع كاي مربع بدرجة $(n-1)$ وبذلك حسب المبرهنة السابقة، وحسب مبرهنة لدينا

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{\nu}}}\sim t(\nu)$$

حيث $Z\sim N(0,1)$ ، $X\sim \chi^2(\nu)$ ومنه

$$T=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}}{n-1}}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ; T\sim t(n-1)$$

حيث أن $Y=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

تلخيص: 1- إذا كان $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ فإن $Z\sim N(0,1)$

2- إذا كان $X=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ فإن $X\sim\chi^2(n-1)$

3- إذا كان $T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{\nu}}}$ فإن $Z\sim N(0,1)$ ، $X\sim\chi^2(\nu)$

4- إذا كان $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ فإن $T\sim t(n-1)$ حيث $\bar{X}$ متوسط عينة حجمها n و s انحرافها المعياري.

تمرين: إذا كانت أوزان أكياس الطحين الذي تنتجه إحدى المؤسسات يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط 50 كغ، أخذنا عينة عشوائية حجمها (10) أكياس من إنتاج هذه المؤسسة فوجدنا أن انحرافها المعياري 1كغ والمطلوب: أوجد احتمال أن يزيد متوسط العينة على 51 كغ.

الحل:

$\mu = 50 \quad , n = 10 \quad , \sigma = 1 \Rightarrow S = 1$

الاحتمال المطلوب هو أن يكون متوسط العينة المكونة من 10 أكياس هو 51 وهذا يختلف عن متوسط ما يصنعه المعمل كاملاً وهو 50.

$$P(\bar{X} > 51) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \frac{51-50}{\frac{1}{\sqrt{10}}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \sqrt{10}\right)$$

نضع $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ فيكون $T \sim t(n-1)$ أي $T \sim t(9)$ ومنه

$$P(\bar{X} > 51) = P(T > 3.16) = 1 - P(T < 3.16)$$

لإخراج القيمة $P(T < 3.16)$ من الجدول نبحث عن القيمة الأقرب إلى 3.16 وذلك في السطر $v = 9$ وتكون القيمة الأقرب هي (3.25) وبعدها ننظر إلى دليل t السفلي الموافق لهذا الرقم فنجد $t_{0.995}$ عندئذ

$$P(\bar{X} > 51) = 1 - P(T < 3.16) = 1 - 0.995 = 0.005$$

*** انتهت المحاضرة الحادية عشر ***