٢-٧- تمارين محلولة:

(١) أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$(x-1)(x-k)y''+(x-2k+1)y'-y=0 \qquad ;k\neq 0$$

على شكل متسلسلة في قوى x (أي في جوار النقطة $x=0$).

الحل:

نلاحظ أن $x=0$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة لأن:

$$p(x)=\frac{x-2k+1}{(x-1)(x-k)}\Rightarrow p(0)=\frac{-2k+1}{k}$$

$$q(x)=\frac{-1}{(x-1)(x-k)}\Rightarrow q(0)=\frac{-1}{k}$$

من هنا نستنتج أن $p(0),q(0)$ دالتان تحليليتان عند النقطة $x=0$.

عن حل من الشكل: $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

باشتقاق هذه العلاقة نجد: $y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

بالتعويض عن y'',y',y في المعادلة المعطاة نجد:

$$(x-1)(x-k)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + (x-2k+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+(n-1)]c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}[(1-2k)n-(k+1)n(n-1)]c_n x^{n-1} + k\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = 0$$

لإيجاد صيغة تراجعية (قانون تدريجي لحساب c_n) نوحد أدلة $\sum$ وذلك بوضع كل n بـــ $n+1$ في المجموع الثاني وكل n بـــ $n+2$ في المجموع الثالث فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+(n-1)]c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}[(1-2k)(n+1)-(k+1)n(n+1)]c_{n+1}x^n + k\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)]c_{n+2}x^n = 0$$

بالمطابقة بين قوى x المختلفة نجد العلاقة التالية:

$$[-c_0+(1-2k)c_1+2kc_2]=0$$

$$[2(1-2k)-2(k+1)]c_2+6kc_3=0$$

$$3c_2+[3(1-2k)-6(k+1)]c_3+12kc_4=0$$

....

$$[n(n-1)+(n-1)]c_n+[(1-2k)(n+1)-(k+1)n(n+1)]c_{n+1} + k(n+1)(n+2)c_{n+2}=0$$

من هنا نجد أن:

$$c_2=\frac{1}{2k}c_0+\frac{2k-1}{2k}c_1$$

$$c_3=c_2=\frac{1}{2k}c_0+\frac{2k-1}{2k}c_1$$

$$c_4 = c_3 = c_2$$

....

$$c_n = c_2$$

وبالتالي فإن القانون التدريجي يمكن كتابته بالشكل:

$$c_{n+2} = \frac{(1-n^2)c_n - [1-(3n+2)k - n^2(k+1)]c_{n+1}}{k(n+1)(n+2)}$$

وذلك $\forall n \geq 0$.

وهكذا نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة المعطاة يكتب بالشـــكل التالي:

$$y = c_0\left(1 + \frac{1}{2k}x^2 + \frac{1}{2k}x^3 + ...\right) + c_1\left(x + \frac{2k-1}{2k}x^2 + \frac{2k-1}{2k}x^3 + ...\right)$$

حيث c_1, c_0 ثابتان اختياريان.

ملاحظة:

(٢) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1+x^2)y''+xy'-y=0$$

في جوار النقطة $x=0$.

الحل:

من الواضح أن $x=0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية لذا تقبل المعادلة المعطاة حلاً من الشكل: $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

ولنعين الثوابت c_n. نشتق y مرتين:

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}+(n^2-1)c_n]x^n=0$$

وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر نجد:

$$c_2=\frac{1}{2}c_0, c_3=0, c_4=-\frac{1}{8}c_0, \dots, c_{n+2}=-\frac{n-1}{n+2}c_n$$

ويتضح من العلاقة $c_{n+2} = -\dfrac{n-1}{n+2}c_n$ أن: $c_1 = c_3 = c_5 = ... = 0$

ومنه فإن $c_{n+2} = 0$ إذا كان n عدداً فردياً. أما إذا كان n عدداً زوجياً $(n = 2k)$

فإن:

$$c_{2k} = -\frac{2k-3}{2k}c_{2k-2} = \frac{(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)}c_{2k-4}$$

$$= ..... = (-1)^{k+1}\frac{1.3.5...(2k-3)}{2^k k!}c_0$$

وهكذا يكون الحل الكامل هو:

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + ...) + c_1 x$$

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1.3.5....(2k-3)}{2^k k!}x^{2k}) + c_1 x$$

$$y = c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 - \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1.3.5....(2k-3)}{2^k k!}x^{2k}) + c_1 x$$

وبإجراء اختبار النسبة نجد: [illegible]

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = x^2$$

والمتسلسلة متقاربة عندما $|x| < 1$.

(٣) أوجد حل المعادلة التفاضلية: $y'' + y = 0$

في جوار $x = 0$.

الحل:

واضح أن $x = 0$ نقطة عادية. نبحث عن حل من الشكل $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

باشتقاق y مرتين والتعويض في المعادلة نجد:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

لإيجاد القانون التدريجي لحساب c_n نوحد أدلـــة $\sum$ وذلـك بوضـع كـل n بـ $n+2$ في المجموع الأول ويبتدئ المجموع من الصفر بدلاً من 2 فنحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n] x^n = 0$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة لجميع قيم x، فمن الضروري أن يكون معامل كل قوة من قوى x المختلفة مساوياً للصفر، ولذا نستنتج أن:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالقانون التدريجي (صيغة تراجعية) وهكذا نحصل على:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2.1} = -\frac{c_0}{2!}$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{2.3} = -\frac{c_1}{3!}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4.3} = \frac{c_0}{4!}$$

$$c_5 = -\frac{c_3}{5.4} = \frac{c_0}{5!}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{6.5} = -\frac{c_0}{6!}$$

$$c_7 = -\frac{c_5}{7.6} = -\frac{c_1}{7!}$$

وعموماً إذا كانت $n = 2k+1$، فإن:

$$c_n = c_{2k+1} = -\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1 \quad ; \quad k = 1,2,3,....$$

وبالتالي فإن الحل يأخذ الشكل:

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!}x^2 - \frac{c_1}{3!}x^3 + \frac{c_0}{4!}x^4 + \frac{c_1}{5!}x^5 + \dots$$

$$+ \dots\dots + \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots\dots$$

$$y = c_0[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots] +$$

$$+ c_1[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots]$$

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

(٤) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - xy = 0$

في جوار النقطة $x = 1$.

الحل:

واضح أن $x = 1$ نقطة عادية، ولذا نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$

ومن ثم فإن:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-1)^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} (x-1)^n$$

بالتعويض عن y'', y', y في المعادلة المعطاة ينتج أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} (x-1)^n - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = 0$$

ولمساواة معاملات قوى $x-1$ المتناظرة، يجب أن نعبر عن x، معامل y في المعادلة المفروضة بدلالة قوى $x-1$، أي نكتب: $x = 1+(x-1)$، لاحظ أن هذا هو بالضبط متسلسلة تايلور للدالة x حول النقطة $x=1$، وهكذا فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الصيغة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n - [1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = 0$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^{n+1}$$

وبإزاحة ترقيم الجمع في المتسلسلة الثانية في الطرف الأيمن ينتج أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (x-1)^n$$

وبمساواة معاملات $x-1$ المتناظرة نحصل على:

$$2c_2 = c_0 ، 3.2c_3 = c_1 + c_0 ، 4.3c_4 = c_2 + c_1 ، 5.4c_5 = c_3 + c_2 ،\ldots$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_n + c_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

وهكذا يكون:

$$c_2 = \frac{c_0}{2} ، \quad c_3 = \frac{c_1}{6} + \frac{c_0}{6} ، \quad c_4 = \frac{c_2}{12} + \frac{c_1}{12} = \frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{12}$$

$$c_5 = \frac{c_3}{20} + \frac{c_2}{20} = \frac{c_0}{30} + \frac{c_1}{120} ،\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وبالتالي فإن:

$$y = c_0[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \ldots..] +$$

$$+ c_1[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \ldots..]$$

أو:

(٣) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$$

في جوار النقطة $x = 0$.

الحل:

واضح أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة. نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} \qquad ; c_0 \neq 0$$

نشتق y مرتين فنجد:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n x^{n+\lambda-2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda+1}-$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda}=0$$

أو:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n}=0$$

أي أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\lambda)+1]c_n x^{n+1}=0$$

نستبدل $n-1$ بـ n في المتسلسلة الثانية فتبدأ عندئذ هذه المتسلسلة بـ $n=1$، وتكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$[2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1]c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n-$$

$$-[2(n+\lambda-1)+1]c_{n-1}\}x^{n}=0$$

وبالمطابقة نجد:

$$[2\lambda(\lambda-1)+3\lambda-1]c_0=0 \qquad ;c_0\neq 0 \tag{٨}$$

$$[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n-[2(n+\lambda-1)+1]c_{n-1}=0 \tag{٩}$$

من المعادلة المميزة (٨) نجد:

$$2\lambda^2+\lambda-1=0$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن $\lambda_2=\frac{1}{2},\lambda_1=-1$ هما جذرا المعادلة المميزة

ونلاحظ أن $\lambda_1-\lambda_2\notin Z$ (ليس عدداً صحيحاً) فيوجد للمعادلة المعطاة حلان مستقلان خطياً لكل منهما شكل المتسلسلة المعممة.

من المعادلة (٩) نستطيع الآن إيجاد الدستور التكريجي:

$$[2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1]c_n=[2(n+\lambda)-1]c_{n-1} \quad ;n\geq 1$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$c_n=\frac{2(n+\lambda)-1}{2(n+\lambda)(n+\lambda-1)+3(n+\lambda)-1}c_{n-1} \qquad (١٠)$$

وبوضع $\lambda=\lambda_1=-1$ نجد:

$$c_n=\frac{2n+2(-1)-1}{2(n-1)(n-2)+3(n-1)-1}c_{n-1}=\frac{2n-3}{n(2n-3)}c_{n-1}$$

$$c_n=\frac{1}{n}c_{n-1} \quad ;n\geq 1$$

وهكذا فإن:

$$c_1=c_0$$

$$c_2=\frac{1}{2}c_1=\frac{1}{2}c_0$$

$$c_3=\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{3.2}c_0$$

....

$$c_n=\frac{1}{n!}c_0$$

ومنه نجد الحل الخاص الأول للمعادلة وهو:

$$y_1=|x|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^{-1}[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+.....]$$

$$=\frac{1}{x}[c_0+c_0x+\frac{1}{2!}c_0x^2+\frac{1}{3!}c_0x^3+.....]$$

$$y_1=\frac{1}{x}e^x \qquad ;c_0=1$$

وبأخذ الجذر الآخر $\lambda_2=\frac{1}{2}$ نجد:

$$c_n=\frac{2}{2n+3}c_{n-1} \quad ;n\geq 1$$

وهكذا فإن:

$$c_1 = \frac{2}{5}c_0$$

$$c_2 = \frac{4}{5.7}c_0$$

$$c_3 = \frac{8}{5.7.9}c_0$$

....

وتكون العبارة:

$$y_2 = |x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{\frac{1}{2}}[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...]$$

$$= c_0 x^{\frac{1}{2}}[1 + \frac{2x}{5} + \frac{(2x)^2}{5.7} + \frac{(2x)^3}{5.7.9} + ...]$$

هي الحل الخاص الثاني للمعادلة. والحل العام للمعادلة المفروضة هو:

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

(٤) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x(x+1)y'' + (1+x)y' - y = 0$$

في جوار النقطة $x = 0$.

الحل:

بما أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}$$

نشتق y مرتين فنجد:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda-2}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بـــ x وبالتعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda+1} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+\lambda+1} = 0 \qquad (١١)$$

لتعيين المعادلة المميزة، نجعل أمثال أقل قوة في x عندما $n=0$ (أمثـــال الحـــد الثابت) مساوٍ للصفر، فنحصل على:

$$\lambda(\lambda-1)c_0 + \lambda c_0 = 0$$

$$[\lambda(\lambda-1)+\lambda]c_0 = 0 \qquad ; c_0 \neq 0$$

ومنه:

$$\lambda^2 = 0$$

وجذور هذه المعادلة $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ونلاحظ أن $\lambda_1 - \lambda_2 \in Z$ وبالتـــالي لإيجـــاد الحل العام للمعادلة المعطاة، يجب أن نجد حلاً خاصاً من الشكل:

$$y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ولإيجاد القانون التدريجي العام: نجعل أمثال $x^{n+\lambda+1}$ مساوياً للصفر في العلاقـــة (١١) وذلك بعد تبديل كل n بـــ $n+1$ في المتسلسلتين الثانية و الثالثة من العلاقة (١١)، فنحصل على:

$$c_{n+1} = \frac{-(n+\lambda)^2+1}{(n+\lambda+1)^2}c_n \qquad ; n \geq 0$$

لنبدل كل λ بـــ $\lambda_1 = 0$ فنجد:

$$c_{n+1} = \frac{1-n^2}{(1+n)^2}c_n \qquad ; n \geq 0$$

أو:

$$c_{n+1} = \frac{1-n}{1+n} c_n \qquad ; n \geq 0$$

وهكذا فإن:

$$c_1 = c_0 \qquad ; c_0 \neq 0$$
$$c_2 = 0$$
$$c_3 = -\frac{1}{3} c_2 = 0$$

....

وبالتالي فإن:

$$c_2 = c_3 = c_4 = ... = c_n = 0$$

ومنه نجد أن الحل الخاص من أجل $\lambda_1 = 0$ هو:

$$y_1 = c_0 + c_1 x$$
$$y_1 = 1 + x \qquad ; c_0 = 1$$

نجري التحويل:

$$y = y_1 . z \tag{١٢}$$

$$y = (1+x) . z \tag{١٣}$$

نشتق العلاقة (١٣) ونبدل في المعادلة المفروضة فنحصل على معادلة جديـدة تحوي الدالة المجهولة z:

$$x(1+x)z'' + (3x+1)z' = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد:

$$z = e_1[\ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}] + e_2$$

نبدل في العلاقة (١٢) نحصل على الحل العام المطلوب للمعادلة المفروضة:

(٥) عين طبيعة النقطة $x = 0$ لكل من المعادلات التالية ثم أوجد حلها العام في جوار الصفر.

(1) $(1-x^2)y'' + 2xy' + y = 0$

(2) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$; n عدد صحيح

(3) $(2+x^2)y'' + xy' + (1+x)y = 0$

(4) $x^2y'' + x(x-\frac{1}{2})y' + \frac{1}{2}y = 0$

(5) $x(1-x)y'' + (1-5x)y' - 4y = 0$

(6) $(x^2-x)y'' + xy' - y = 0$

(7) $(x^3+2x)y'' - y' - 6xy = 0$

(8) $x(1-x)y'' - (1+3x)y' - y = 0$