المحاضرة السابعة عشرة.   الخميس ٧/٥/٢٠١٥م

- الكلفة - الحلقة التامة.
- الجبر - الجبر التام.

الحلقة: لتكن $X \neq \emptyset$ ، $\mathcal{Z}$ صف من أجزاء X
نقول عن $\mathcal{Z}$ انه حلقة إذا تحققت الشروط التالية:

$\boxed{1}$ $\emptyset \in \mathcal{Z}$ $\boxed{2}$ $\forall A,B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{Z}$
$B \setminus A \in \mathcal{Z}$, $A \cup B \in \mathcal{Z}$ و

أمثلة: $X = \{1,2,3\}$ ، $\mathcal{Z}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$
هل تمثل $\mathcal{Z}_1$ حلقة؟
نلاحظ أن $\{1,2\} \setminus \{1\} = \{2\} \notin \mathcal{Z}_1 \Leftarrow \mathcal{Z}_1$ لا تمثل حلقة

$\mathcal{Z}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$
هل تمثل $\mathcal{Z}_2$ حلقة؟
نلاحظ ان شروط الحلقة محققة في $\mathcal{Z}_2 \Leftarrow \mathcal{Z}_2$ تمثل حلقة.

ملاحظة: إذا كانت $\mathcal{Z}$ حلقة فإنه ليس بالضرورة أن تمثل $\mathcal{Z}$ طبولوجيا.
مثال:
$\mathcal{Z} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}\}$
- إذا كانت $\mathcal{Z}$ تمثل طبولوجيا فإنه ليس بالضرورة أن تمثل $\mathcal{Z}$ حلقة.
~~مثال~~:

- هل الكلفة مغلقة بالنسبة لـ $\cap$ ، Δ ، ^{c} ؟

١- بالنسبة لـ Δ:
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{Z}$

٢- بالنسبة لـ $\cap$:

$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Z}$

٢ - بالنسبة للمتمم :

إن الحلقة غير مغلقة بالنسبة لعملية المتمم والمثال يوضح ذلك.

$X = \{1, 2, 3\}$ و $\mathcal{Z} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$

نلاحظ أن :

$\{1\}^c = \{2, 3\} \notin \mathcal{Z}$

الحلقة التامة :

هي حلقة مغلقة بالنسبة للاجتماع المعدود أي:

$\forall A_i \in \mathcal{Z}, \; i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{Z}$.

مبرهنة :

إذا كانت $X \neq \emptyset$ و $\mathcal{Z}$ صف من أجزاء X و $\emptyset \in \mathcal{Z}$ عندئذ تكون $\mathcal{Z}$ حلقة إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1/ $\forall A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Z} \;\wedge\; A \setminus B \in \mathcal{Z}$

2/ $\forall A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{Z} \;\wedge\; A \cup B \in \mathcal{Z}$

3/ $\forall A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{Z} \;\wedge\; A \setminus B \in \mathcal{Z}$

4/ $\forall A, B \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{Z} \;\wedge\; A \cap B \in \mathcal{Z}$

ولكن ليست حلقة إذا تحقق:

$\forall A, B \in \mathcal{Z} : A \cup B \in \mathcal{Z}, \; A \cap B \in \mathcal{Z}$

الجبر - الجبر التام :

تعريف :

[1] - إذا كانت $X \neq \emptyset$ وكان $\mathcal{A}$ صف من أجزاء X نقول عن $\mathcal{A}$ أنه يشكل جبر إذا تحققت الشروط

[1] $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

[2] $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, \; A \setminus B \in \mathcal{A}$

ملاحظة:

. إن الجبر مغلق بالنسبة للعمليات الاربعة $\Delta, \setminus, \cap, \cup$
و بالنسبة للمتمم:

$$A, X \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

- الجبر:

$X \neq \Phi$ ، $\mathcal{A}$ صف من اجزاء X ، نقول عن $\mathcal{A}$ انه يمثل
جبراً إذا تحقق:

$\boxed{1}$. $\emptyset \in \mathcal{A}$

$\boxed{2}$. $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$\boxed{3}$. $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

. اثبات من $(2) \Leftarrow (1)$:

1) $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset^c \in \mathcal{A} \Rightarrow X \in \mathcal{A}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{A}$

$A^c \cup B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A^c \cup B^c) \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ وهو المطلوب

. الجبر التام:

. هو جبر و يحقق انه مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع العدود اي تحقق

$$\forall A_i \in \mathcal{A}_i : A_i^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

- تعريف الحلقة المولدة بالصف T

- تعريف الجبر المولد بالصف.

- الحلقة المولدة بالصف T.

. إذا كانت $X \neq \emptyset$ ، T صفاً من اجزاء X نقول عن $\mathcal{Z}$ انه حلقة
. مولدة بالصف T إذا كانت أصغر حلقة تحوي T
. اي ان $\mathcal{Z} = \bigcap_{i=1} \mathcal{Z}_i \; ; \; T \subseteq \mathcal{Z}_i \; , \; i \in \mathbb{N}$

/ /

الجبر المولد بالصف T:

إذا كانت $X \neq \emptyset$ و T صفاً من أجزاء X، نقول عن A انه جبر مولد بالصف T إذا كانت اصغر جبر يحوي T

اي ان:

$$A = \bigcap_{i=1} A_i \quad : T \subseteq A_i \quad \forall i \in \mathbb{N} .$$

جبر بوريل:

إذا كان (X, τ) فضاء طبولوجي وكان $X = \mathbb{R}$ عندئذٍ نقول عن $A(\mathbb{R})$ انه جبر بوريل إذا كان اصغر جبر تام يحوي τ حيث τ هي جميع المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$

اي:

$$\tau = \{A ;\ A \subseteq \mathbb{R},\ \forall x \in b : \exists a, b \in \mathbb{R} ;\ x \in]a, b[\subseteq \mathbb{R}\}$$

تمرين:

لتكن:

$$T = \{\{1, 2\}, \{3\}\} \quad \text{و} \quad X = \{1, 2, 3, 4\}$$

١. هل T تمثل حلقة.

٢. - اوجد اصغر حلقة تحوي T

٣. - اوجد اصغر جبر يحوي T

٤. - اوجد اصغر طبولوجيا تحوي T

٥. - اوجد اكبر جبر من اجزاء X

٦. - اوجد اصغر جبر من اجزاء X

انتهت المحاضرة...