الفضاءات المترية:

من المحاضرة السابقة /11/

$X \neq \phi$ مجموعة نفرض أنه يعرف عليها تطبيق من الشكل

$$d : X \times X \longrightarrow R$$

يحقق الشروط التالية

$\forall x, y \in X \quad , \; d(x,y) \geq 0$

[illegible] $\quad d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

وبالتالي يكون (X,d) فضاء متري

يسمى التطبيق عندئذ " مسافة " ، هذا التطبيق ليس وحيد بالحالة العامة لدينا العديد من التطبيقات التي تحقق نفس الشروط السابقة

[illegible] (X,d)

$r \geq 0 \quad , \quad a \in X$

[illegible] $\quad N(a,r) = \{ d(X,a) < r \}$

مركزها a ، نصف قطرها r

كرة مفتوحة في الفضاء X

" جوار للنقطة المثبتة a "

المجموعات المفتوحة

ليكن (X,d) فضاءً متريًا و لتكن Y مجموعة جزئية من X .

نقول أن Y مجموعة مفتوحة في X اذا حققت الشرط التالي

$$\forall y \in Y \ , \ \exists \varepsilon > 0 \ ; \ N(y,\varepsilon) \subseteq Y$$

" يوجد جوار لهذه النقطة محتوى تماماً في Y أي كرة مفتوحة مركزها y ونصف قطرها ε " .

مثال: في $\mathbb{R}$ ، المجموعة وحيدة العنصر ليست مفتوحة

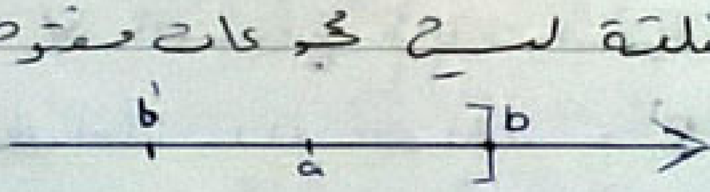
لتوضيح ذلك

لنفرض ان $a \in \mathbb{R}$ ، أن $\{a\}$ مفتوحة عندئذٍ $\exists \varepsilon > 0$

$$\underbrace{N(a,\varepsilon)}_{\text{جوار يضم كل نقاط x التي تحقق الشرط}} \subseteq \underbrace{\{a\}}_{\text{مجموعة وحيدة العنصر}}$$

وهذا غير ممكن .

المجالات المغلقة ونصف المغلقة ليست مجموعات مفتوحة .



$$|x-a| < r$$

أي $a-r < x < r+a$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad N(b,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ , \ d(x,b) < \varepsilon$$

$$|x-b| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x-b < \varepsilon$$

$$b-\varepsilon < x < b+\varepsilon$$

المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هي مجموعات مفتوحة

نتيجة: نفرض (X,d) فضاء متري عندئذ المجموعتان ϕ ، X مفتوحتان.

البرهان: لنفرض جدلاً أن ϕ ليست مفتوحة، حسب التعريف توجد $a \in \phi$ و $\varepsilon > 0$ بحيث

$$N(a,\varepsilon) \not\subset \phi$$

وهذا تناقض

مبرهنة/ في الفضاء المتري $\mathbb{R}$ الشروط الآتية متكافئة لأجل أي مجموعة $Y \subset \mathbb{R}$

1- لأجل كل نقطة $a \in Y$ يوجد مجال مفتوح مركزه a محتوى في Y.

2- لأجل كل $a \in Y$ يوجد مجال مفتوح يحوي a محتوى في Y

3- Y اجتماع لمجالات مفتوحة.

البرهان: $(1) \Rightarrow (2)$ واضح.

$(2) \Rightarrow (3)$ لنبرهن أن Y اجتماع لمجالات مفتوحة

$$Y = \bigcup_{a \in Y} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in Y} I_a \subseteq Y$$

$$Y = \bigcup_{a \in Y} I_a$$

حيث I_a مجال مفتوح يحوي a محتوى في Y وبالتالي Y اجتماع لمجالات مفتوحة.

$(3) \Rightarrow (1)$ ليكن $b \in Y$ عندئذٍ من الفرض Y ينتمي لأحد المجالات المفتوحة ، عندئذٍ يوجد مجال مفتوح ، $b \in I_a$

ومنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث

$$N(b,\varepsilon) \subseteq I_a \subset Y$$

تمرين/ في أي فضاء متري ، جوار أي نقطة منه يشكل مجموعة مفتوحة

البرهان:

ليكن (X,d) فضاء متري ، ولتكن $a \in X$; $\varepsilon > 0$ وأن

$$N(a,\varepsilon) \subseteq X$$

$$\forall\ x \in N(a,\varepsilon) \ ,$$

فإن $d(x,a) < \varepsilon$

$$\varepsilon' = \varepsilon - d(x,a) > 0$$

$$y \in N(x,\varepsilon')$$

$$d(y,x) < \varepsilon' = \varepsilon - d(x,a)$$

$$d(y,x) + d(x,a) < \varepsilon$$

$$d(y,a) < \varepsilon$$

$$N(x,\varepsilon') \subset N(a,\varepsilon)$$

مبرهنة/ ليكن (X,d) فضاء متري عندئذٍ:

1. اجتماع أي أسرة لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة.
2. تقاطع أي عدد منته من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.
3. X , ϕ مجموعات مفتوحة

البرهان:

1- لتكن $\{X_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات المفتوحة في X

لتكن $a\in \bigcup_{i\in I} X_i$

عندئذ يوجد دليل $j\in I$ بحيث $a\in X_j$ ومنه

يوجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$N(a,\varepsilon)\subset X_j \subset \bigcup_{i\in I} X_i$$

2- (لتكن أسرة منتهية)

لنفرض أن $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ أسرة من المجموعات المفتوحة في X بعدد منتهية

- إذا كان $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i=\phi$ يتم المطلوب

- لنفرض أن $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \neq \phi$ عندئذ يوجد $a\in \bigcap_{i=1}^{n} Y_i$

ومنه

$$a\in Y_1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon_1>0\ ;\ N(a,\varepsilon_1)\subset Y_1$$
$$a\in Y_2 \Rightarrow \exists\, \varepsilon_2>0\ ;\ N(a,\varepsilon_2)\subset Y_2$$
$$\vdots$$
$$a\in Y_n \Rightarrow \exists\, \varepsilon_n>0\ ;\ N(a,\varepsilon_n)\subset Y_n$$

لنفرض أن (لدينا n ابسلون نأخذ الأصغر)

$$\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

عندئذ:

$$N(a,\varepsilon)\subset N(a,\varepsilon_i)\subset Y_i\ ;\ \forall i$$
$$\Rightarrow\ N(a,\varepsilon)\subset \bigcap_{i=1}^{n} Y_i$$

ومنه كان $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i$ مجموعة مفتوحة في X بالنسبة للمسافة d.

ادرس هل $\mathbb{Z}$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ , \exists \ a,b \in \mathbb{R} \ ; \ x \in]a,b[\subset \mathbb{R}$$

لكن

$$]a,b[\not\subset \mathbb{Z}$$

لا مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ ليست مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري $\mathbb{R}$

ملاحظة

1. المجموعات الآتية $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ هي مجموعات غير مفتوحة في الفضاء المتري $\mathbb{R}$
2. أي مجموعة منتهية من الفضاء $\mathbb{R}$ ليست مجموعات مفتوحة

المجموعات المغلقة

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري ، نقول عن المجموعة الجزئية $Y \subseteq X$ إنها مغلقة في X إذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة في X.

ينتج من التعريف السابق أن أي فضاء متري كل من X و ϕ هي مجموعات مغلقة في X.

التمرين