المتتاليات

تعريف: ليكن (X, d) فضاء متري نسمي كل تطبيق

$$u : N \longrightarrow X$$

$$\forall n \in N \ ; \ u(n) = u_n$$

متتالية في X نرمز لها بـ $\{u_n\}_{n\in N}$ أو $(u_n)_{n\in N}$

تعريف: ليكن (X, d) فضاء متري و $\{u_n\}_{n\in N}$ متتالية من X و $a \in X$

نقول أن المتتالية $\{u_n\}_{n\in N}$ تتقارب إلى النقطة a إذا حققت الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in N \ ; \ \forall n \in N \ , \ n \geq n_0$$

فإن

$$\underbrace{d(a, u_n)}_{} < \varepsilon$$

هي متتالية من الأعداد الحقيقية موجبة الحد.

هذه المتتالية متقاربة من الصفر

ونرمز لذلك

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a$$

بمعنى آخر، بأن جميع حدود المتتالية $\{u_n\}_{n\in N}$ تقع في جوار $N(a,\varepsilon)$ باستثناء عدد منته من الحدود

$$\lim_{n\to\infty} d(a,u_n)=0$$

نتيجة: في أي فضاء متري (X,d) كل متتالية متقاربة نهايتها وحيدة

الإثبات:

لتكن $\{u_n\}_{n\in N}$ متتالية متقاربة في X ، وأن لهذه المتتالية نهايتين

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a$$
$$= b$$

لنبرهن أن النهايتين متساويتين

$$\forall \tfrac{\varepsilon}{2}>0 ,\ \exists n_0\in N ,\ \forall n\geq n_0 ;\ d(u_n,a)<\tfrac{\varepsilon}{2} ,$$
$$d(u_n,b)<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$d(a,b)\leq d(a,u_n)+d(u_n,b) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$d(a,b)=0 \Longrightarrow$$
$$a=b$$

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري ، $A\subset X$ مجموعة جزئية غير خالية ، نسمي المقدار

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y) : x,y\in A\}$$

قطر المجموعة A .

إذا كان $\delta(A)<\infty$ نقول أن المجموعة A محدودة

نبرهن في أي فضاء متري كل متتالية متقاربة محدودة

البرهان:

ليكن (X,d) فضاء متري ، $\{u_n\}_{n\in N}$ متتالية في X متقاربة

من $a\in X$

$$\forall \varepsilon>0 . \exists n_0\in N , \forall n\geq n_0$$

$$d(a,u_n)<\varepsilon$$

$$r=d(a,u_{n_1})+d(a,u_{n_2})+\dots+d(a,u_{n_0})+\varepsilon+1$$

منه اذا كان u_n فإن

$u_n\in N(a,r)$

وبالتالي نفرض $K=\{u_n\}$ فإن

$\delta(K)<r$

مبرهنة/ ليكن (X,d) فضاء متري ، A مجموعة جزئية غير خالية في X و

$a\in X$ ، الشروط الآتية متكافئة .

1. $a\in cl(A)$
2. توجد في A متتالية $\{u_n\}_{n\in N}$ متقاربة من a

البرهان:

① ⇐ ② لنفرض أن $a\in cl(A)$ نحصل لكل $n\in N$

$N(a,\frac{1}{n})\cap A\neq\phi$; $\frac{1}{n}>0$

، نختار $u_n\in A$.

لنأخذ المتتالية $\{u_n\}_{n\in N}$ من عناصر المجموعة A

وأنه $d(a,u_n) < \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} d(a,u_n) = 0$$

إذاً توجد متتالية $\{u_n\}_{n\in N}$ متقاربة من النقطة a

وهذا يعني أن المتتالية $\{u_n\}$ متقاربة من a

② ⇐ ①

لتكن $\{u_n\}_{n\in N}$ متتالية من عناصر A متقاربة من a

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists n_0 \in N \; ; \forall n \geq n_0 ,$$

$$d(a,u_n) < \varepsilon$$

وواضح أن الكرة

$$N(a,\varepsilon) \cap A \neq \phi$$

ومنه

$$a \in cl(A)$$

مبرهنة/ ليكن (X,d) فضاءً متريًّا و A مجموعة جزئية غير خالية في X

و $a \in X$

① $a \in D(A)$

② توجد في $A \setminus \{a\}$ متتالية $\{u_n\}_{n\in N}$ متقاربة من a

البرهان:

② ⇐ ① لنفرض أن $a \in D(A)$

ومن أجل كل $n \in N$

$$\frac{1}{n} > 0 \; ; N(a,\tfrac{1}{n}) \cap A \neq \phi$$

$$\neq \{a\}$$

ومنه يوجد $u_n \in A$ لتأليف المتتالية $\{U_n\}_{n\in N}$ من عناصر المجموعة A وأنه

$$d(a, u_n) < \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(a, u_n) = 0$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{u_n\}$ متقاربة من a.

$(2) \Rightarrow (1)$

لتكن $\{U_n\}_{n\in N}$ متتالية من عناصر A متقاربة من a

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists n_0 \in N \; , \forall n \geq n_0$$

$$d(a, u_n) < \varepsilon$$

$$N(a, \varepsilon) \cap A \neq \phi - \{a\}$$

ومنه $a \in D(A)$

تعريف: ليكن (X, d) فضاء متري ، $\{u_n\}_{n\in N}$ متتالية في X نقول أن هذه المتتالية هي متتالية كوشي إذا حققت الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \; , \exists n_0 \in N \; , \forall n, m \geq n_0 \; ;$$

$$d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

نظرية: في أي فضاء متري كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي

البرهان:

ليكن (X, d) فضاء متري ، $\{U_n\}_{n\in N}$ متتالية في X متقاربة من $a \in X$

$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\ \forall n \geq n_0 \,,$

$$d(a, u_n) < \varepsilon/2$$

$n, m \geq n_0$

$$d(u_n, u_m) \leq d(a, u_n) + d(a, u_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ المتتالية هي متتالية كوشي

العكس ليس صحيح بالضرورة

في $\mathbb{R}$ صحيح في $\mathbb{Q}$ ليس صحيح.

مـ في أي فضاء متري كل متتالية كوشي محدودة.

"البرهان وظيفة".

تعريف: نقول عن الفضاء المتري (X, d) إنه تام إذا حقق الشرط

كل متتالية كوشي في X تكون متقاربة.

من الأمثلة:

$\mathbb{R}$ فضاء تام

بالنسبة للمسافة المألوفة

$$d(x, y) = |x - y|$$

إذا تغيرت هذه المسافة هذا الكلام ليس صحيح

بالضرورة.

تعريف: ليكن (X,d) فضاء متري و $Y\subset X$ ، نقول
أن (Y,d) فضاء متري جزئي من X إذا كان
مقصور d على Y يشكل مسافة بمعنى إذا كان (Y,d)
فضاء متري في ذاته "بالنسبة لنفس المسافة" إذا تغيرت
المسافة يبقى فضاء متري ـ ـ ـ لا يكون جزئي".

مبرهنة/ كل مجموعة مغلقة في أي فضاء متري تام تشكل فضاء
متري جزئي تام

البرهان:
ليكن (X,d) فضاء متري و F مجموعة جزئية غير خالية من X
ومغلقة
ان (F,d) فضاء جزئي في (X,d)
لتكن $\{u_n\}_{n\in N}$ متتالية كوشي في (F,d)
إن $\{u_n\}_{n\in N}$ هي متتالية كوشي في X ومنه بأنا
$\{u_n\}$ متقاربة من نقطة ما a تنتمي لـ X $(a\in X)$
ومنه بأن $a\in cL(F)$
وبالتالي
$a\in F$

مبرهنة/ ليكن (X,d) فضاء متري و (F,d) فضاء متري
جزئي تام عندئذ F مغلق في X

البرهان:

لنبرهن على أن

$$cl(F) = F \cup D(F) = F$$

لنفرض

$a \in cl(F)$ عندئذ توجد متتالية $\{u_n\}_{n\in N} \subset F$

متقاربة من a

ومنه فان $\{u_n\}_{n\in N}$ هي متتالية كوشي في F

ومنه فان $a \in F$

ومنه فان

$$cl(F) \subseteq F \subset cl(F)$$

\# انتهت .