برهنة: ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A \subset X$ مجموعة جزئية وأن $\mathcal{L}$ مجموعة كل المجموعات المغلقة في X والتي كل منها يحوي A عندئذ

$$cl(A) = \bigcap_{B\in\mathcal{L}} B$$

البرهان:

لتكن $a \in cl(A) = A \cup D(A)$

$a\in A \Rightarrow a \in B \quad \forall B\in\mathcal{L}$

$a \in D(A)$

نفرض جدلاً أن $a\notin B$ حيث $B\in\mathcal{L}$

عندئذ $a \in X\setminus B$ والتي هي مجموعة مفتوحة

يوجد $\varepsilon>0$ بحيث $N(a,\varepsilon)\subset X\setminus A$

$N(a,\varepsilon)\cap A = \phi$

التعريف النقطة الحدية $\forall \varepsilon>0 \quad N(a,\varepsilon)\cap A \neq \phi$

$\neq \{a\}$

وهذا تناقض فرضيه ومنه

$a\in B \quad \forall B\in \mathcal{L}$

$cl(A)\subseteq \bigcap_{B\in\mathcal{L}} B$

الاحتواء العكسي:

لتكن $b\in\bigcap_{B\in\mathcal{L}} B$ لنفرض أن $b\notin cl(A)$

فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث

$N(b,\varepsilon)\cap A=\phi$

بما أن المجموعة $N(b,\varepsilon)$ مفتوحة فإن $X\setminus N(b,\varepsilon)$ مغلقة في X

وإذا $A \subset X \setminus N(b,\varepsilon)$

وأيضاً $b \notin X \setminus N(b,\varepsilon)$

وهذا يناقض كون $b \in \bigcap_{B\in\mathcal{L}} B$

ومنه

$$b \in cl(A)$$

التراص الموضعي:

تعريف: نقول عن الفضاء المتري (X,d) أنه متراص موضعياً إذا حقق الشرط:

أي كان $a\in X$ توجد $N(a,\varepsilon)$ مجموعة متراصة

ونقول عن المجموعة الجزئية $K\subset X$ أنها متراصة موضعياً إذا كان لأجل كل $a\in K$ يوجد $N(a,\varepsilon)$ بحيث $N(a,\varepsilon)\cap K$ متراصة.

مبرهنة/ ليكن X فضاء متراص موضعيا و K مجموعة مغلقة في X، و H مجموعة مفتوحة في X عندئذ المجموعة $L=H\cap K$ متراصة موضعياً في X

البرهان: ليكن $a\in L$ عندئذ $a\in H$ ولكون H مفتوحة يوجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$N(a,\varepsilon)\subset H$$

$$N(a,\varepsilon)\cap L = N(a,\varepsilon)\cap H\cap K$$
$$= N(a,\varepsilon)\cap K$$

وبما أن $N(a,\varepsilon)$ متراصة , K مغلقة

فإن $N(a,\varepsilon)\cap K$ متراصة .

الاستمرار: ندرس العلاقة بين الفضاءات المترية

ليكن (X,d) , (Y,d') فضائين متريين

و $f: X \Rightarrow Y$ تابع (تطبيق) و $a\in X$.

نقول أن f مستمر في النقطة a إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 ,$$
$$\forall x\in N(a,\delta) \Rightarrow f(x)\in N(f(a),\varepsilon)$$

$\boxed{\text{أي}}$ $$d(x,a)<\delta \Rightarrow d'(f(a),f(x))<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \forall x\in X \ , d(x,a)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(a))<\varepsilon$$

ونقول أن f مستمر على X إذا كان مستمراً في كل نقطة $a\in X$.

مبرهنة: ليكن $f: X \to Y$ تطبيق بين فضائين متريين

و $a\in X$ الشروط الآتية متكافئة:

① f مستمر في a

② من أجل كل متتالية $\{x_n\}_{n\in N}$ من عناصر X متقاربة من a

فإن المتتالية $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ متقاربة من $f(a)$ في Y.

البرهان:

$\forall x \in N(a,\delta) \Rightarrow f(x) \notin N(f(a),\varepsilon)$

① ⇐ ② لنفرض أن f مستمر في a ، ولتكن $\{x_n\}_{n\in N}$ متتالية من نقاط X متقاربة من a

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ , \ \forall n \geq n_0$ ؛

$d(x_n, a) < \varepsilon$

$x_n \in N(a, \varepsilon)$

وبما أن f مستمر في a عندئذٍ

$\forall n \geq n_0 \ , \ f(x_n) \in N(f(x), \varepsilon)$

$d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$

وهذا يعني أن المتتالية $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ متقاربة من $f(a)$ في Y.

② ⇐ ① لنفرض أن f غير مستمر في النقطة a عندئذٍ نحصل لكل $n \in N$ نقطة

$x_n \in N(a, \frac{1}{n})$

$f(x_n) \notin N(f(a), \varepsilon)$

فنحصل على متتالية $\{x_n\}_{n\in N}$ من نقاط X متقاربة من a وأن المتتالية $\{f(x_n)\}$ غير متقاربة من $f(a)$ وهذا يناقض الفرض وهو f مستمر في a.

الاستمرار المنتظم

نقول عن التابع $f: X \longrightarrow Y$ إنه مستمر بانتظام إذا تحقق الشرط:

$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \quad d(x,y) < \delta \ ; \ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

* ينتج من التعريف أن كل تطبيق مستمر على الفضاء X يكون مستمراً على X (بانتظام الفضاء)

مبرهنة: ليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابع بين فضائين متريين ولنفرض أن الفضاء X متراص، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة

① f مستمر (نقطياً) على X.

② f مستمر بانتظام على X.

البرهان:

① ⟸ ② لنفرض أن f مستمراً على X ولتكن $a \in X$ عندئذٍ f مستمر في a ومنه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \frac{\delta_a}{2} > 0$$

$$\forall \quad x \in \boxed{N(a, \frac{\delta_a}{2})}$$

فإن

$$f(x) \in N(f(a), \varepsilon)$$

بهذا الشكل نجد أن

$$X = \bigcup_{a \in X} \{a\} \subset \bigcup N(a, \frac{\delta_a}{2}) \subseteq X$$

$$X = \bigcup_{a \in X} N(a, \frac{\delta_a}{2})$$

ومن شروط

$$N(a_1, \frac{\delta_{a_1}}{2}), \ldots, N(a_t, \frac{\delta_{a_t}}{2})$$

تحقق

$$X = \bigcup_{i=1}^{t} N(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2})$$

لنفرض أن

$$\delta = \max\left(\frac{\delta_{a_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{a_t}}{2}\right)$$

لنبرهن على أن $\forall x, y \in X$ عندئذ

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad ; d(x,y) < \delta$

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$$d(x,y) \leq d(x, a_1) + d(y, a_1)$$

$$\leq \frac{\delta_{a_1}}{2} + \frac{\delta_{a_1}}{2} < \delta$$

وبالتالي

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in N\left(x, \frac{\delta_a}{2}\right)$$

وبالتالي f مستمر بانتظام $f(x) \in N(f(y), \varepsilon)$

$x, y \in X$

واضح ② ⇐ ①

$\bigcup N\left(a, \frac{\delta_a}{2}\right)$

خواص التابع المستمر:

مبرهنة ①: ليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابع مستمر، إذا كانت K مجموعة متراصة في X فإن $f(K)$ متراصة في Y.

البرهان: لنفرض أن المجموعة K متراصة في X ولتكن $\{y_n\}_{n \in N}$ متتالية من عناصر $f(K)$ عندئذ $\forall n \in N$ يوجد $x_n \in K$ تحقق $f(x_n) = y_n$

فنحصل المتتالية $\{x_n\}_{n \in N}$ من عناصر K وحسب نظرية سابقة توجد نقطة ملاصقة $a \in K$ للمتتالية $\{x_n\}$

إذاً

جوار نقطة

كرة

$\forall \varepsilon > 0$ ؛ $N(a, \varepsilon) \cap \{x_n\} \neq \phi$

ومنه يوجد x_n (عنصر ما) بحيث

$x_n \in N(a, \varepsilon)$

ولكن f مستمر في a فإن

$f(x_n) \in N(f(a), \varepsilon)$

إذاً

$N(f(a), \varepsilon) \cap \{f(x_n)\} \neq \phi$

ومنه $f(a)$ نقطة ملاصقة للمتتالية $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ وبالتالي

$f(a)$ نقطة ملاصقة للمتتالية $\{y_n\}$ أي أن

$f(K)$ متراصة

مبرهنة/ ليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابع بين فضائين متريين

الشروط الآتية متكافئة

① f مستمر على X.

② لأجل أي مجموعة مفتوحة $A \subset Y$ فإن $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في X.

③ لأجل أي مجموعة مغلقة $B \subset Y$ فإن $f^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة في X

البرهان:

للمغلقات

اللانهائي تقاطع

①⟸③ لنفرض أن f مستمر على X.

لتكن B مجموعة مغلقة في Y ولنبرهن أن $f^{-1}(B) = cl(f^{-1}(B))$

ثانياً

$$f^{-1}(B) \subseteq cl(f^{-1}(B))$$

الاحتواء المعاكس

لنفرض $a \in cl(f^{-1}(B))$ عندئذٍ توجد

متتالية $\{x_n\}_{n\in N}$ من عناصر $f^{-1}(B)$ متقاربة من a

ولكون f مستمرة في a فإن المتتالية $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ متقاربة

من $f(a)$

وأن $x_n \in f^{-1}(B)$

$f(x_n) \in B$

$\{f(x_n)\}$ متتالية من عناصر B متقاربة من $f(a)$

وبما أن B مغلقة فإن $f(a) \in B$ ومن تعريف

الصورة العكسية $a \in f(B)$

⇐ المساواة صحيحة

③ ⟸ ② لتكن A مجموعة مفتوحة في Y، عندئذٍ $Y \setminus A$

مجموعة مغلقة في Y ومن الفرض $f^{-1}(Y \setminus A)$ مغلقة في

X

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A)$$

$$= X \setminus f^{-1}(A)$$

ومنه $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في X.

② ⟸ ① لتكن $a \in X$ عندئذٍ يوجد

$N(a,\varepsilon) \subset X$ ولتكن $f(a) \in Y$

يوجد

$$N(f(a),\varepsilon) \subset Y$$

ومن الفرض بأن

$$f^{-1}(N(f(a),\varepsilon)) \subset X$$

مجموعة مفتوحة في X

$$f(a) \in N(f(a),\varepsilon)$$

من تعريف الصورة العكـ

$$a \in f^{-1}(N(f(a),\varepsilon))$$

مجموعة مفتوحة من تعريف المجموعة المفتوحة يوجد أنه

ومنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$N(a,\delta) \subseteq f^{-1}(N(f(a),\varepsilon))$$

لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر X متقاربة من a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;;\; \forall n \geq n_0 :$$

$$x_n \in N(a,\delta)$$

ومن تعريف الصورة العكسية فإنه:

$$f(x_n) \in N(f(a),\varepsilon)$$

وهذا يعني أن f مستمر في النقطة a.

انتهى.

تنويه: ما كتب بالرصاص ليس لزاماً أن نكتبه :