المحاضرة الخامسة عشرة   الخميس ٢٠/٤/٢٠١٠م

حل تمارين عن تكامل استيلجس

تمرين ①: بفرض أن $f(x) = x$ و

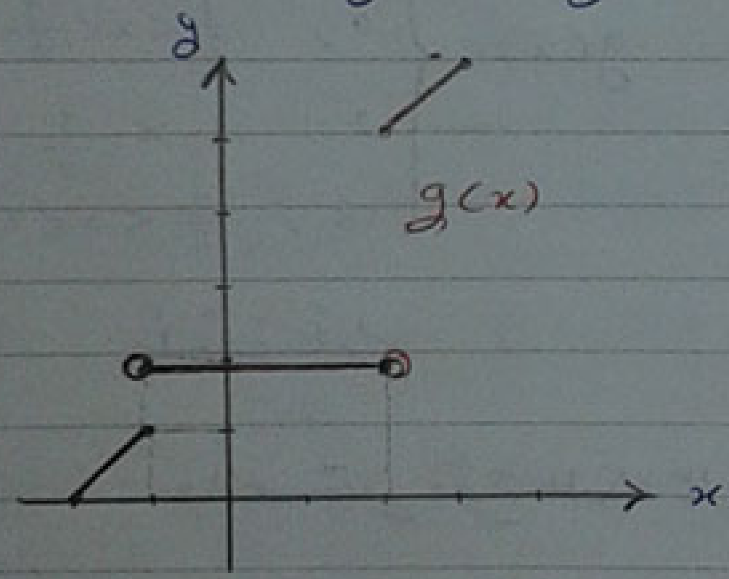
$$g(x) = \begin{cases} x+2 \ ; & -2 \le x \le -1 \\ 2 \ ; & -1 < x < 2 \\ x+3 \ ; & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

أثبت أن $I = (s)\int_{-2}^{3} x \, dg(x) = 6$ مع رسم $g(x)$ ثم استنتج التكامل

$$(s)\int_{-2}^{3} g(x) \, df$$

الحل: نعلم أن

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx + f(a) \cdot [g(a+0) - g(a)] + \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot [g(c_i+0) - g(c_i-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]$$



$$I = \int_{-2}^{3} x \, dg(x) = \int_{-2}^{-1} x(1)\, dx + \int_{-1}^{2} x(0)\, dx + \int_{2}^{3} x(1)\, dx + f(-1) \cdot [g(-1+0) - g(-1-0)] + f(2) \cdot [g(2+0) - g(2-0)]$$

⊛ $g(-1+0) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} 2 = 2$

⊛ $g(-1-0) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} (x+2) = 1$

⊛ $g(2+0) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} (x+3) = 5$

⊛ $g(2-0) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} 2 = 2$.

$$I = \int_{-2}^{3} x \, dg(x) = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{-1} + 0 + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{2}^{3} + (-1)[2-1]$$

$$+ 2[5-2] = \frac{1}{2}[1-4] + \frac{1}{2}[9-4] - 1 + 6 =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 5 = 6$$

سؤال:

استنتج التكامل $\int_{-2}^{3} g\, df$ من التكامل السابق:

الحل:

نعلم أن $\int_{-2}^{3} f(x)\, dg(x) + \int_{-2}^{3} g(x)\, df(x) = \left[g(x) f(x)\right]_{-2}^{3}$

بالتعويض نجد أن:

$$\int_{-2}^{3} g\, df = [f(3).g(3) - f(-2).g(-2)] - 6$$

$$= 18 - 6 = 12$$

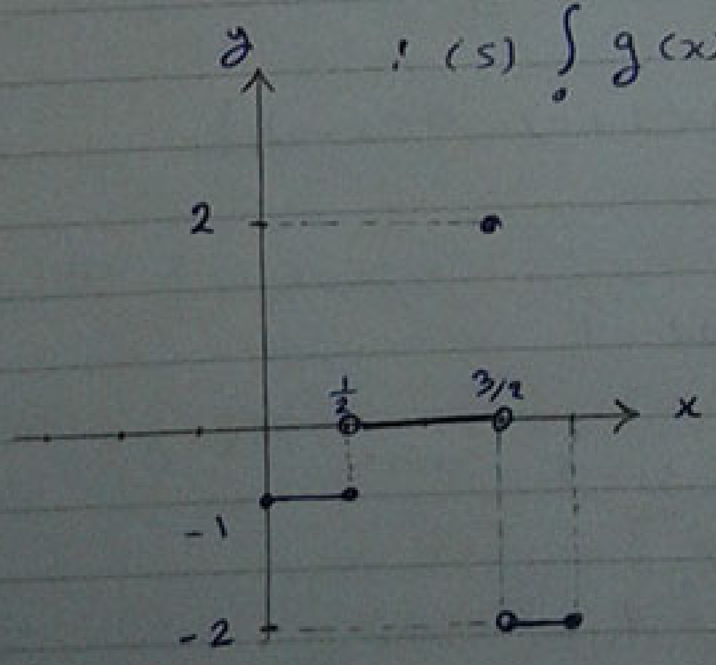
تمرين: ليكن لدينا f , g تابعان معرفان كما يلي:

$$f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} -1 ; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 ; & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 2 ; & x = \frac{3}{2} \\ -2 ; & \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

أثبت أن

$$I = (s) \int_{0}^{2} x^2 \, dg(x) = \frac{-17}{4}$$

واستنتج قيمة التكامل $(s) \int_{0}^{2} g(x)\, df(x)$:



الحل:

$$I = \int_{0}^{2} x^2 \, dg(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)\left[\right.$$

$$\left[g\left(\frac{1}{2}+0\right) - g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right] + f\left(\frac{3}{2}\right).$$

$$.\left[g\left(\frac{3}{2}+0\right) - g\left(\frac{3}{2}-0\right)\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}[0-(-1)] + \frac{9}{4}[-2-0] = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = \frac{-17}{4}$$

استنتاج التكامل: $\int_0^2 g(x).\,df(x)$

$$\int_0^2 g(x)\,dx^2 = [g(x).f(x)]_0^2 + \frac{17}{4} = -8 + \frac{17}{4} = \frac{-15}{4}$$

تمرين: لدينا $f(x) = x^2$ و

$$g(x) = \begin{cases} -2 & ; 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; 1 < x \le 3 \\ 2 & ; 3 < x < 10 \\ 5 & ; x = 10 \end{cases}$$

- أثبت أن $\int_0^{10} x^2\,dg(x)$ ثم استنتج $\int_0^{10} g\,df$

يحل التمرين بنفس اسلوب حل التمرين السابق

تمارين: أثبت صحة ما يلي:

$\boxed{1}$. $\int_{-1}^{1} x\,d(\arctan x) = 0$

$\boxed{2}$. $\int_0^2 x^2\,d(\ln(x+1)) = \ln 3$

$\boxed{3}$. $\int_0^{\pi/2} x\,d(\sin x) = (\pi/2) - 1$

الحل:

$\boxed{1}$ $\int_{-1}^{1} x\,d(\arctan x) = 0$

بما أن $g(x) = \arctan x$ تابع مستمر على $[-1,1]$ فإن

$$\int_{-1}^{1} x\,d(\arctan x) = \int_{-1}^{1} x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

نلاحظ أن $\frac{x}{1+x^2}$ تابع فردي والمجال $[-1,1]$ متناظر فإن قيمة التكامل تكون صفر

$$\int_{-1}^{1} x \, d(\arctan x) = 0$$. ايان.

$\boxed{2}$

$$\int_0^2 x^2 \, d(\ln(x+1)) = \int_0^2 \frac{x^2 (1)}{x+1} \, dx$$

تابو صم على [0,2]

$$= \int_0^2 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} \, dx = \int_0^2 (x-1) \, dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 + \left[\ln(x+1) \right]_0^2 = [2 - 2 - 0] + \ln 3$$

$$= \ln 3$$

انتهت المحاضرة ...