حلول عددية

المحاضرة الحادية عشرة

٢٣/٤/٢٠١٥

2 طريقة رايلي - ريتز الخطية قطعياً: (المناقشة النظرية غير مطلوبة)

- تقوم هذه الطريقة بحل مسألة القيم الحدية نفسها التي تحلها طريقة رايلي - ريتز:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\cdot\frac{du}{dx}\right)+q(x)\cdot u=f(x)$$

حيث $0\le x\le 1$, $u(0)=u(1)=0$

ولكن باستخدام توابع قاعدة خطية قطعياً تدعى توابع القبعة.

- ومن أجل ذلك نقوم أولاً بتجزئة المجال $[0,1]$ إلى n مجالاً كما يلي:

1) نختار النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ بحيث:

$$0=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=1$$

بحيث تصبح لدينا المجالات الجزئية: $I_i=[x_i, x_{i+1}]$

ذات الأطوال (المختلفة بشكل عام): $h_i=x_{i+1}-x_i$

حيث: $i=0,1,\dots,n-1$

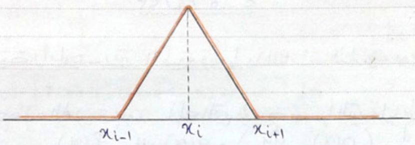
2) نعرف دوال القاعدة $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ كما يلي:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}0 & ; x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\\ \frac{1}{h_{i-1}}(x-x_{i-1}) & ; x\in[x_{i-1},x_i]\\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1}-x) & ; x\in[x_i,x_{i+1}]\end{cases}$$

حيث $i=\overline{1,n-1}$

/ /

وهي توابع تحقق الشروط الحدية ، مستمرة ، ومستقلة خطياً
وقد سُمّيت بتوابع القبعة لأن لها الرسم البياني الآتي :



ـ أما مشتقات هذه التوابع فلن تكون مستمرة ، إلا أنها ثابتة على المجالات I_i
ويكون لها الشكل :

$$u_i'(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin \left]x_{i-1}, x_{i+1}\right[\\ \frac{1}{h_{i-1}} & ; x \in \left]x_{i-1}, x_i\right[\\ \frac{-1}{h_i} & ; x \in \left]x_i, x_{i+1}\right[\end{cases}$$

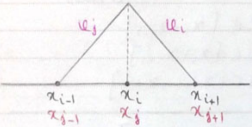
وذلك من أجل كل $i = \overline{1, n-1}$

ـ لنوجد الشكل المصفوفي $AC = B$.

وجدنا أن عناصر المصفوفة A تعطى بالشكل :

$$a_{ij} = \int_0^1 \left[p(x)\, u_i'(x) \cdot u_j'(x) + q(x)\, u_i(x) u_j(x) \right] dx$$

ولنناقش عبارة a_{ij} بالنسبة لدوال القبعة التي اقترناها
لنأخذ الجداء $u_i(x) \cdot u_j(x)$ ، فإنه بمجرد انعدام u_j أو u_i
يكون الجداء معدوماً ، ولنناقش الحالات التالية :



1) إذا كان $j = i$ ، عندئذٍ سينعدم
الجداء على كل المجال $[0, 1]$
ماعدا المجال الجزئي $[x_{i-1}, x_{i+1}]$
وكذلك الأمر بالنسبة للجداء $u_i'(x) \cdot u_j'(x)$
ومنه يكون :

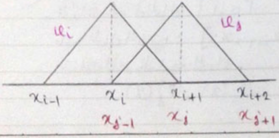
$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ p(x) \cdot [u_i'(x)]^2 + q(x) \cdot [u_i(x)]^2 \right\} dx$$

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) [u_i'(x)]^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x) [u_i(x)]^2 dx$$

حفظ

$$\boxed{\begin{aligned} a_{ii} = &\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\, dx + \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\, dx + \\ &+ \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x)\, dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x)\, dx \end{aligned}}$$

وهي عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة A



2) إذا كان $j = i+1$ عندئذٍ سينعدم
الجداء على كل المجال $[0, 1]$
ماعدا المجال الجزئي $[x_i , x_{i+1}]$
وكذلك الأمر بالنسبة للجداء $u_i'(x) \cdot u_j'(x)$

ومنه يكون:

$$a_{i\,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{p(x)\, u_i'(x) . u_{i+1}'(x) + q(x)\, u_i(x) . u_{i+1}(x)\}\, dx$$

ولكن لدينا:

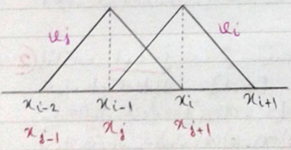
$$u_j(x) = u_{i+1}(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [x_i, x_{i+2}] \\ \frac{1}{h_i}(x - x_i) & ; x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{1}{h_{i+1}}(x_{i+2} - x) & ; x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \end{cases}$$

$$u_j'(x) = u_{i+1}'(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin]x_i, x_{i+2}[\\ \frac{1}{h_i} & ; x \in]x_i, x_{i+1}[\\ \frac{-1}{h_{i+1}} & ; x \in]x_{i+1}, x_{i+2}[\end{cases}$$

$$a_{i\,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ p(x)\left(\frac{-1}{h_i}\right)\left(\frac{1}{h_i}\right) + q(x)\left(\frac{1}{h_i}\right)(x_{i+1} - x)\left(\frac{1}{h_i}\right)(x - x_i)\right\} dx$$

$$\boxed{a_{i\,i+1} = -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\, dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)\, q(x)\, dx}$$ مهم

وهي العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي في المصفوفة A



③ إذا كان $j = i - 1$ عندئذٍ سينعدم الجداء على كل المجال $[0,1]$ ماعدا المجال الجزئي: $[x_{i-1}, x_i]$ وكذلك الأمر بالنسبة للجداء: $u_i'(x) . u_j'(x)$

ومنه يكون:

$$a_{i\,i-1}=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\{p(x)\cdot u_i'(x)\cdot u_{i-1}'(x)+q(x)\,u_i(x)\cdot u_{i-1}(x)\}\,dx$$

وبنفس الطريقة سنجد:

$$\boxed{a_{i\,i-1}=-\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(x)\,dx+\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)(x-x_{i-1})\,q(x)\,dx}$$ هام

وهي العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي في المصفوفة A.

* وفيما عدا ذلك ستكون كل عناصر المصفوفة A الأخرى صفرية.
ومنه فإن المصفوفة A ستكون شبه قطرية (ثلاثية الأقطار)

– أما عناصر المصفوفة B فتعطى كما وجدنا سابقاً بالعلاقة:

$$b_i=\int_0^1 f(x)\,u_i(x)\,dx$$

$$b_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,u_i(x)\,dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,u_i(x)\,dx$$

$$\boxed{b_i=\frac{1}{h_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})f(x)\,dx+\frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)f(x)\,dx}$$ هام

مثال: أوجد الشكل المصفوفي لمسألة القيم الحدية التالية:

$$-\frac{d}{dx}(xu') + 2u = x^2 \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

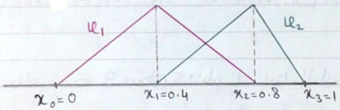
باستخدام رايلي - ريتز الخطية قطعياً، مستخدماً التقسيم التالي:

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 0.4 \quad , \quad x_2 = 0.8 \quad , \quad x_3 = 1$$

الحل: لدينا ثلاثة مجالات، وبالتالي: $n=3 \Longrightarrow n-1=2$

ومنه فالحل المطلوب هو: $u(x) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$

حيث φ_i توابع خطية قطعياً (توابع القبعة).



بمقارنة المعادلة التفاضلية المعطاة مع الشكل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة نجد: $p(x) = x \quad , \quad q(x) = 2 \quad , \quad f(x) = x^2$

ولدينا:

$$h_0 = x_1 - x_0 = 0.4 - 0 = 0.4$$
$$h_1 = x_2 - x_1 = 0.8 - 0.4 = 0.4$$
$$h_2 = x_3 - x_2 = 1 - 0.8 = 0.2$$

ولدينا أيضاً:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [x_0, x_2] \\ \frac{1}{h_0}(x - x_0) & ; x \in [x_0, x_1] \\ \frac{1}{h_1}(x_2 - x) & ; x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

/ /

$$\Rightarrow u_1(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0, 0.8] \\ \frac{1}{0.4}(x) & ; x \in [0, 0.4] \\ \frac{1}{0.4}(0.8-x) & ; x \in [0.4, 0.8] \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$u_2(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0.4, 1] \\ \frac{1}{0.4}(x-0.4) & ; x \in [0.4, 0.8] \\ \frac{1}{0.2}(1-x) & ; x \in [0.8, 1] \end{cases}$$

لنوجد الشكل المصفوفي: $A\,C = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

– نعلم أن:

$$a_{ii} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx + \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx +$$

$$+ \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2 q(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2 q(x)\,dx$$

وبالتالي

$$*\, a_{11} = \left(\frac{1}{h_0}\right)^2 \int_{x_0}^{x_1} x\,dx + \left(\frac{-1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} x\,dx +$$

$$+ \left(\frac{1}{h_0}\right)^2 \int_{x_0}^{x_1} 2(x-x_0)^2\,dx + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} 2(x_2-x)^2\,dx$$

$$a_{11} = \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_0^{0.4} x\,dx + \left(\frac{-1}{0.4}\right)^2 \int_{0.4}^{0.8} x\,dx +$$

$$+ \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_0^{0.4} 2x^2\,dx + \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.4}^{0.8} 2(0.8-x)^2\,dx$$

/ /

$$a_{11} = 0.5 + 1.5 + 0.26666 + 0.26666 = 2.53332$$

$$* \; a_{22} = \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} x\,dx + \left(\frac{-1}{h_2}\right)^2 \int_{x_2}^{x_3} x\,dx + $$
$$+ \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} 2(x-x_1)^2\,dx + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2 \int_{x_2}^{x_3} 2(x_3-x)^2\,dx$$

$$a_{22} = \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.4}^{0.8} x\,dx + \left(\frac{-1}{0.2}\right)^2 \int_{0.8}^{1} x\,dx +$$
$$+ \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.4}^{0.8} 2(x-0.4)^2\,dx + \left(\frac{1}{0.2}\right)^2 \int_{0.8}^{1} 2(1-x)^2\,dx$$

$$a_{22} = 1.5 + 4.5 + 0.26666 + 0.13333 = 6.39999$$

- وكذلك نعلم أن :

$$a_{i\,i+1} = -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)(x-x_i)\,q(x)\,dx$$

ومنه :

$$* \; a_{12} = -\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} x\,dx + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} 2(x_2-x)(x-x_1)\,dx$$

$$a_{12} = -\left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.4}^{0.8} x\,dx + \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.4}^{0.8} 2(0.8-x)(x-0.4)\,dx$$

$$a_{12} = -1.5 + 0.13333 = -1.36667$$

- وأيضاً لدينا :

$$a_{i\,i-1} = -\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i-x)(x-x_{i-1})\,q(x)\,dx$$

ومنه: $* \; a_{21} = -\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} x\,dx + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} 2(x_2-x)(x-x_1)\,dx$

نلاحظ أن: $a_{21} = a_{12} = -1.36667$

_ أما عناصر المصفوفة B فتعطى بالشكل:

$$b_i = \frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x)\,dx + \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x)\,dx$$

ومنه:

$$* \; b_1 = \frac{1}{h_0} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) x^2\,dx + \frac{1}{h_1} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - x) x^2\,dx$$

$$b_1 = \frac{1}{0.4} \int_0^{0.4} x^3\,dx + \frac{1}{0.4} \int_{0.4}^{0.8} (0.8 - x) x^2\,dx$$

$$b_1 = 0.016 + 0.058666 = 0.074666$$

$$* \; b_2 = \frac{1}{h_1} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) x^2\,dx + \frac{1}{h_2} \int_{x_2}^{x_3} (x_3 - x) x^2\,dx$$

$$b_2 = \frac{1}{0.4} \int_{0.4}^{0.8} (x - 0.4) x^2\,dx + \frac{1}{0.2} \int_{0.8}^{1} (1 - x) x^2\,dx$$

$$b_2 = 0.090666 + 0.075333 = 0.165999$$

ومنه فالشكل المصفوفي للمسألة:

$$\begin{bmatrix} 2.53332 & -1.36667 \\ -1.36667 & 6.39999 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.074666 \\ 0.165999 \end{bmatrix}$$

/ /

مثال: أوجد الشكل المصفوفي لمسألة القيم الحدية التالية:

$$-\frac{d}{dx}\left(x^2 u'\right) + x u = x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

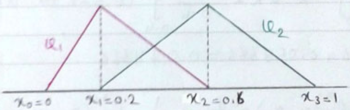
باستخدام رايلي ـ ريتز الخطية قطعياً، مستخدماً التقسيم الآتي:

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 0.2 \quad , \quad x_2 = 0.6 \quad , \quad x_3 = 1$$

الحل: لدينا ثلاثة مجالات وبالتالي: $n = 3 \Rightarrow n-1 = 2$

ومنه فالحل المطلوب هو: $u(x) = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2$

حيث φ_i هي توابع قطعية قطعياً (توابع القبعة)



بمقارنة المعادلة التفاضلية المعطاة مع الشكل العام للمعادلة المدروسة نجد:

$$p(x) = x^2 \quad , \quad q(x) = x \quad , \quad f(x) = x$$

ولدينا: $h_0 = 0.2 \quad , \quad h_1 = 0.4 \quad , \quad h_2 = 0.4$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0, 0.6] \\ \frac{1}{h_0}(x - x_0) = \frac{1}{0.2}(x) & ; x \in [0, 0.2] \\ \frac{1}{h_1}(x_2 - x) = \frac{1}{0.4}(0.6 - x) & ; x \in [0.2, 0.6] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0.2, 1] \\ \frac{1}{h_1}(x - x_1) = \frac{1}{0.4}(x - 0.2) & ; x \in [0.2, 0.6] \\ \frac{1}{h_2}(x_3 - x) = \frac{1}{0.4}(1 - x) & ; x \in [0.6, 1] \end{cases}$$

/ /

$AC = B$ لتوحيد الشكل المصفوفي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

* $a_{11} = \left(\frac{1}{h_0}\right)^2 \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx + \left(\frac{-1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx +$

$+ \left(\frac{1}{h_0}\right)^2 \int_{x_0}^{x_1} q(x)(x-x_0)^2 dx + \left(\frac{1}{h_1}\right) \int_{x_1}^{x_2} q(x)(x_2-x)^2 dx$

$a_{11} = \left(\frac{1}{0.2}\right)^2 \int_0^{0.2} x^2 dx + \left(\frac{-1}{0.4}\right)^2 \int_{0.2}^{0.6} x^2 dx +$

$+ \left(\frac{1}{0.2}\right)^2 \int_0^{0.2} x^3 dx + \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.2}^{0.6} x(0.6-x)^2 dx$

$a_{11} = 0.06666 + 0.43333 + 0.01 + 0.04 = 0.54999$

* $a_{22} = \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx + \left(\frac{-1}{h_2}\right)^2 \int_{x_2}^{x_3} p(x)dx +$

$+ \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} q(x)(x-x_1)^2 dx + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2 \int_{x_2}^{x_3} q(x)(x_3-x)^2 dx$

$a_{22} = \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.2}^{0.6} x^2 dx + \left(\frac{-1}{0.4}\right)^2 \int_{0.6}^{1} x^2 dx +$

$+ \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.2}^{0.6} x(x-0.2)^2 dx + \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.6}^{1} x(1-x)^2 dx$

$a_{22} = 0.43333 + 1.63333 + 0.06666 + 0.09333 = 2.22665$

* $$a_{12} = -\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,(x_2-x)(x-x_1)\,dx$$

$$a_{12} = -\left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.2}^{0.6} x^2\,dx + \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 \int_{0.2}^{0.6} x\,(0.6-x)(x-0.2)\,dx$$

$$a_{12} = -0.43333 + 0.02666 = -0.40667$$

* $$a_{21} = -\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} q(x)\,(x_2-x)(x-x_1)\,dx$$

نلاحظ أن :

$$a_{12} = a_{21} = -0.40667$$

* $$b_1 = \frac{1}{h_0} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)\,f(x)\,dx + \frac{1}{h_1} \int_{x_1}^{x_2} (x_2-x)\,f(x)\,dx$$

$$b_1 = \frac{1}{0.2} \int_{0}^{0.2} x^2\,dx + \frac{1}{0.4} \int_{0.2}^{0.6} (0.6-x)\,x\,dx$$

$$b_1 = 0.01333 + 0.06666 = 0.07999$$

* $$b_2 = \frac{1}{h_1} \int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)\,f(x)\,dx + \frac{1}{h_2} \int_{x_2}^{x_3} (x_3-x)\,f(x)\,dx$$

$$b_2 = \frac{1}{0.4} \int_{0.2}^{0.6} (x-0.2)\,x\,dx + \frac{1}{0.4} \int_{0.6}^{1} (1-x)\,x\,dx$$

$$b_2 = 0.09333 + 0.14666 = 0.23999$$

ومنه فالشكل المصفوفي :

$$\begin{bmatrix} 0.54999 & -0.40667 \\ -0.40667 & 2.22665 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07999 \\ 0.23999 \end{bmatrix}$$

نهاية المحاضرة الحادية عشرة