الأربعاء: 15/4/2015

المحاضرة الثامنة:

حل الوظيفة:

أوجد الحل العام لمعادلة هرميت في جوار الصفر

$$w''-2zw'+\lambda w=0 \quad ; \quad \lambda>0$$

الحل:

المعادلة من الشكل: $w''+p(z)w'+Q(z)w=0$

$$p(z)=-2z \quad \& \quad Q(z)=\lambda$$

وبما أنهما تابعان تحليليان ومستمران

$z=0$ نقطة عادية نبحث عن حل على شكل متسلسلة قوى في جوار $z=0$

$$w=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

نشتق:

$$w'=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \quad , \quad w''=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}-2z\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}-2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n}+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n=0$$

نوحد الأسس (نستبدل كل n ب $n+2$ في الحد الأول):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, \xi^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, \xi^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \xi^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, \xi^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, \xi^n + \lambda a_0 + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, \xi^n = 0$$

(جميع المتسلسلات يجب أن تبدأ من أكبر دليل من أدلة هذه المتسلسلات)

$$2a_2 + a_0\lambda + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 2a_n \cdot n + \lambda a_n \right] \xi^n = 0$$

بالمطابقة:

$$\xi^0 : \quad 2a_2 + a_0\lambda = 0 \Rightarrow 2a_2 = -a_0\lambda \Rightarrow a_2 = \frac{-a_0\lambda}{2}$$

$$\xi^n : \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 2a_n \cdot n + \lambda a_n = 0$$

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} = (2n - \lambda)\, a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{(2n-\lambda)}{(n+2)(n+1)}\, a_n \quad ; \quad n \geq 1}$$

تسمى هذه الأخيرة صيغة تراجعية أو دستور تدرجي

$$n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{(2-\lambda)}{3.2}\, a_1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{(4-\lambda)}{4.3}\, a_2$$

$$= \frac{(4-\lambda)}{4.3} \cdot \frac{(-a_0\lambda)}{2} = \frac{-\lambda(4-\lambda)}{4.3.2}\, a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{(6-\lambda)}{5.4} a_3$$

$$= \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5.4.3.2} a_1$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{(8-\lambda)}{6.5} a_4$$

$$= \frac{-\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6.5.4.3.2} a_0$$

- - - - - - - - - -

وهكذا نستمر.

نعوض في شكل الحل

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

$$w = a_0 + a_1 z - \frac{a_0}{2}\lambda z^2 + \frac{(2-\lambda)}{3.2} a_1 z^3 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{4.3.2} a_0 z^4$$
$$+ \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5.4.3.2} a_1 z^5 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6.5.4.3.2} a_0 z^6 + \cdots$$

$$w = a_0\left[1 - \frac{\lambda}{2} z^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{4!} z^4 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!} z^6 + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[z + \frac{(2-\lambda)}{3!} z^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} z^5 + \cdots\right]$$

وهو شكل الحل العام لمعادلة هلبرت التفاضلية.

ويكون الحل حسب قيمة λ

مبرهنة: الحلول حول نقطة عادية لمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية وغير متجانسة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من المرتبة الثانية:

$$w'' + p(z)\,w' + Q(z)\,w = R(z)$$

إذا كانت الدوال $Q(z), p(z), R(z)$ دوال تحليلية عند النقطة $z = z_0$

فإن كل حل للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة يكون تحليلياً عند هذه النقطة ويمكن تمثيله بمتسلسلة القوى في $z - z_0$ على الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

نصف قطر تقارب R_c حيث $R_c > 0$

R_c يساوي المسافة بين النقطة العادية $z = z_0$ وأقرب نقطة شاذة تكون عندها أي من الدوال $p(z), Q(z), R(z)$ غير تحليلية.

ولحل هذه المعادلة نتبع نفس الخطوات الواردة أعلاه (طريقة حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية) مع تعديل بسيط وهو فك (نشر الدالة التحليلية $R(z)$ الموجودة في الطرف الأيمن على شكل سلسلة قوى في $z - z_0$ ثم المطابقة

بين معاملات القوى $z - z_0$ بين الطرفين وعندئذ يكون الحل العام للمعادلة المفروضة:

$$w = a_0 w_1(z) + a_1 w_2(z) + w_3(z)$$

حل خاص لغير المتجانسة

مثال:

ابحث في الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$w'' - z\,w' = e^{-z}$$

في جوار الصفر.

الحل:

هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية.

نقارن هذه المعادلة المفروضة مع الشكل العام:

$$w'' + P(z)\,w' + Q(z)\,w = R(z)$$

$$P(z) = -z \quad \& \quad Q(z) = 0 \quad \& \quad R(z) = e^{-z}$$

$$R(z) = e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$$

جميع هذه الدوال تحليلية في جوار الصفر $\Rightarrow$ الصفر نقطة عادية.

ويمكن تمثيل الحل على شكل متسلسلة قوى في جوار الصفر من الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

نشتق:

$$w' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \quad , \quad w'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

نعوض

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - z \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

نستبدل كل n بـ $n+2$ $(n \longrightarrow n+2)$ في الحد الأول:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

نجعل المجاميع تبدأ من الواحد.

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

نطابق:

$$z^0 : \quad 2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$z^n : \quad \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n - \frac{(-1)^n}{n!} \right] = 0$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = n a_n + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{n a_n + \frac{(-1)^n}{n!}}{(n+2)(n+1)} \quad ; \quad n \geq 1}$$ الدستور التدريجي

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_1 - 1}{3.2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{2a_2 + \frac{1}{2}}{4.3} = \frac{3}{4.3.2}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{3a_3 - \frac{1}{3.2}}{5.4}$$

$$= \frac{\frac{3(a_1-1) - 1}{3.2}}{5.4} = \frac{3(a_1-1) - 1}{5.4.3.2}$$

وهكذا نستمر - - - - - - - - - -

نعوض في شكل الحل:

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 z + \frac{1}{2} z^2 + \left(\frac{a_1}{3.2} - \frac{1}{3.2}\right) z^3 + \frac{3}{4.3.2} z^4 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 \left(z + \frac{1}{3.2} z^3 + \cdots\right) + \underbrace{\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3.2} z^3 + \frac{3}{4.3.2} z^4}_{\text{حل خاص لغير المتجانسة}}$$

حل خاص لغير المتجانسة.

مبرهنة هامة:

البحث في حل معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية في جوار نقطة شاذة منتظمة:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية:

$$w'' + a(z)\, w' + b(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

ولنبحث عن حل لهذه المعادلة في جوار النقطة $z = z_0$ وذلك عندما تكون هذه النقطة

شاذة بالنسبة للدالة $a(z)$ أو للدالة $b(z)$ أو لكليهما،

والسؤال الذي يطرح نفسه:

ما هو الشرط الذي ينبغي أن تحققه كل من الدالتين $a(z)$, $b(z)$ كيما تكون للمعادلة (1) حلان أساسيان مستقلان خطياً من الشكل

$$w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{k+\lambda} \qquad (2)$$

ويسمى هذا الشكل متسلسلة صحيحة معممة:

يسمح بالعلاقة بالمجموع

$$w = (z - z_0)^{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{k} \quad ; \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ أو } \mathbb{C}$$

هذان الحلان يصحان في قرص لـ w مركزه النقطة الشاذة z_0 ولا تحوي أي نقاط شاذة أخرى بالنسبة لـ $a(z)$ و $b(z)$ سوى $z = z_0$

ونشترط أيضاً أن $c_0 \neq 0$ والمتسلسلة المذكورة أعلاه هي متسلسلة متقاربة في جوار النقطة $z = z_0$ حيث $z_0 = 0$ أي (سنفترض أن $z_0 = 0$ دون المس بعمومية المسألة) وهذا أمر ممكن من أجل تبسيط المسألة، فيكون شكل الحل:

$$w = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^{k+\lambda}$$

$$= c_0 z^{\lambda} + c_1 z^{\lambda+1} + c_2 z^{\lambda+2} + \cdots$$

$$= z^{\lambda} \left(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \right)$$

لكن لدينا w_1, w_2 حلان للمعادلة (1) عندئذ يكون:

$$(3)\quad \begin{cases} w_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, z^{k+\lambda_1} \quad ; \quad c_0 \neq 0 \\[2ex] w_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\, z^{k+\lambda_2} \quad ; \quad d_0 \neq 0 \end{cases}$$

هذا من جهة، ومن جهة ثانية بما أنّ w_1, w_2 حلان خاصان للمعادلة (1)

$$(4)\quad w_1'' + a(z)\, w_1' + b(z)\, w_1 = 0 \qquad \times\, w_2$$

$$(5)\quad w_2'' + a(z)\, w_2' + b(z)\, w_2 = 0 \qquad \times\, w_1$$

نضرب (5) بـ w_1 ونضرب (4) بـ w_2 ونطرح $(4-5)$ (بعد الضرب)

$$(w_2 w_1'' - w_1 w_2'') + a(z)\,(w_2 w_1' - w_1 w_2') = 0 \qquad (6)$$

لكن نعلم أنّ:

رونسكي $$\Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = w_1 w_2' - w_2 w_1' \qquad (*)$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1'' & w_2'' \end{vmatrix} = w_1 w_2'' - w_2 w_1'' \qquad (**)$$

نعوض (*) و (**) في (6)

$$-\Delta' - a(z)\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{a(z) = \frac{-\Delta'}{\Delta}} \qquad (7)$$

الآن نضرب (4) بـ w_2' ونضرب (5) بـ w_1' ونطرح العلاقتين الناتجتين طرفاً لطرف:

$$\underbrace{(w_2' w_1'' - w_1' w_2'')} + b(z)(w_2' w_1 - w_1' w_2) = 0$$

لا يمثل رونسكي

$$(w_2' w_1'' - w_1' w_2'') + b(z)\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b(z) = \frac{w_1' w_2'' - w_2' w_1''}{\Delta}} \qquad (8)$$

تتمة البرهان في المحاضرة القادمة..

انتهت المحاضرة...