المحاضرة الثانية عشرة الاثنين ٢٠/٤/٢٠١٥م

تكامل استيلجس

- تعريف تكامل استيلجس.
- ملاحظات.
- خواص تكامل استيلجس.
- مسألة الوجود لتكامل استيلجس.
- حساب قيمة تكامل استيلجس.

- مسألة وجود $\int_a^b f\,dg$:

$\boxed{1}$ - إذا كان $g(x)$ تابعاً متزايداً على المجال $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي ليكون تكامل استيلجس موجوداً هو أن يكون

$$\lim_{\Delta p \to 0} [U(f,g,p) - L(f,g,p)] = 0$$

حيث $\Delta p = \max_{1 \le k \le n} (\Delta x_k)$ و p تجزئة للمجال $[a,b]$

$$U(f,g,p) = \sum_{k=1}^{n} M_k(t)\,\Delta g(x_k) \quad ; \quad M_k(t) = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$$

$$L(f,g,p) = \sum_{k=1}^{n} m_k(t)\,.\,\Delta g(x_k) \quad ; \quad m_k(t) = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} (f(x))$$

$\boxed{2}$ - إذا كانت $g(x)$ متزايد على $[a,b]$ و $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن التكامل $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً

$\boxed{3}$ - إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ و $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً.

$\boxed{4}$ - إذا كانت الدالة f كمولة «قابلة للمكاملة» على $[a,b]$ بمفهوم ريمان

وكانت $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز من اجل $k=1$ فإن التكامل $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً .

5 - إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ و $g(x)$ تحقق شرط ليبشتز من اجل $k=1$ على $[a,b]$ فإن التكامل $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً .

6 - إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ قابلة للاشتقاق ومحدودة ومكوّنة " قابلة للمكاملة " حسب ريمان على المجال $[a,b]$ عندئذٍ التكامل $\int_a^b f\,dg$ يكون موجوداً ويعطى بالعلاقة :

$$(S)\int_a^b f\,dg = (R)\int_a^b f \cdot g'\,dx$$

- خواص تكامل استيلجس المتعلقة بمسألة الوجود :

• إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على المجال المغلق $[a,b]$ وكان $\int_a^b f_1\,dg$ و $\int_a^b f_2\,dg$ موجودين على $[a,b]$ وكان $f_1(x) \le f_2(x)$ أياً كانت x من $[a,b]$ فإن $\int_a^b f_1\,dg \le \int_a^b f_2\,dg$

• إذا كانت $g(x)$ متزايداً على $[a,b]$ وكان $\int_a^b f\,dg$ موجوداً فإن :

$\boxed{1}$ $\int_a^b |f(x)|\,dg$ موجود

ولكن ليس بالضرورة إذا كان $\int_a^b |f|\,dg$ موجود أن يكون $\int_a^b f\,dg$ موجود .

$\boxed{2}$ $\int_a^b f^2(x)\,dg$ موجود

وبالعكس يكون الامر صحيح اي إذا كان $\int_a^b f^2\,dg$ موجود فإن $\int_a^b f\,dg$ موجود .

$\boxed{3}$. $\left|\int_a^b f\,dg\right| \le \int_a^b |f|\,dg$

• إذا كانت $f(x)$ تابعاً مستمراً على $[a,b]$ وكانت $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن:

$$\left| \int_a^b f\,dg \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \cdot \bigvee_a^b g(x)$$

حساب قيمة تكامل استيلجس:

$\boxed{1}$ - إذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة على $[a,b]$ مع القفزة g_k عند c_k حيث $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ نقاط انقطاع للدالة $g(x)$ بحيث $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$.

وكانت f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$ بحيث تكون f , g غير مستمرتين معاً عند c_k (من اليمين او من اليسار) عندئذ:

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot g_k$$

والشكل العام:

$$\int_a^b f\,dg = f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot g_k + f(b)[g(b) - g(b-0)]$$

حيث أن:

$g(a+0) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} g(x)$ $\wedge$ $g(a-0) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} g(x)$

مثال: احسب التكامل: $\int_0^3 x^2\, d[x]$

انتهت المحاضرة...