time Appointment Notes 2015/?/6

المحاضرة السابعة عشر : يوم الخميس

طريقة جاكوبي

تشكل لدينا معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى بأكثر من متغيرين

$$f(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$$

حيث لا تظهر الدالة z وإنما تظهر من خلال المشتقات الجزئية

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

وتلخص الطريقة

① الحصول على الجملة المميزة (الجملة المساعدة)

$$(1) \cdots \left\{ \frac{dx_1}{-\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \frac{dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{dx_2}{-\frac{\partial f}{\partial p_2}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{dx_3}{-\frac{\partial f}{\partial p_3}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial f}{\partial x_3}} \right.$$

② إيجاد تكاملين أوليين من الجملة المميزة

$$(2) \cdots \quad f_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_1$$

$$(3) \cdots \quad f_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_2$$

③ من (1) و (2) و (3) نحصل على

$$p_i(x_1, x_2, x_3, a_1) = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

④ نعوض p_i في المعادلة التفاضلية الكلية $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_3^2 + p_3 dx_3$

نكامل هذه المعادلة وبذلك يتم المطلوب..

Example

$$2p_1 x_1 x_3 + 3p_2 x_3^2 + p_2^2 p_3 = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$\frac{dx_1}{-2x_1 x_3} = \frac{dp_1}{2p_1 x_3} = \frac{dx_2}{-3x_3^2 - 2p_2 p_3} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dx_3}{-p_2} = \frac{dp_2}{2p_1 x_1 + 6p_2 x_3^2}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

(1) = (2)

$$\frac{dx_1}{-2x_1 x_3} = \frac{dp_1}{2p_1 x_3} \Rightarrow \frac{dx_1}{-x_1} = \frac{dp_1}{p_1}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{x} + \ln(a) = \ln p_1$$

$$p_1 = \frac{a_1}{x_1} \Leftarrow \boxed{f_1 = x_1 p_1 = a_1}$$

$dP_2 = 0 \Rightarrow P_2 = a_2 \Rightarrow f_2 = P_2 = a_2$

نعوض بـ P_1 ، P_2 في ①

$$2\frac{a_1}{x_1} x_1 x_3 + 3a_2 x_3^2 + a_2^2 P_3 = 0$$

$$P_3 = \frac{-1}{a_2^2}\left(2a_1 x_3 + 3a_2 x_3^2\right)$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية الكلية.

$$dz = \frac{a_1}{x_1}\,dx_1 + a_2\,dx_2 - \frac{1}{a_2^2}\left(2a_1 x_3 + 3a_2 x_3^2\right)dx_3$$

$$z = a_1 \ln|x_1| + a_2 x_2 - \frac{1}{a_2^2}\left(a_1 x_3^2 + a_2 x_3^3\right) + a_3$$

* المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية الخطية

ويكون لها الشكل: $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$

$$Ar + Bs + Ct + Hp + Eq + Fz = G$$

حيث $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

و A, B, C, H, E, F, G هي دوال في x, y أو ثوابت.

تصنيف المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية الخطية:

• تصنف حسب المميز للمعادلة $\Delta = B^2 - 4AC$

$\Delta = 0$ مكافئية "م ت ج خ ح" مكافئية

$\Delta > 0$ زائدية "م ت ج خ ح" زائدية

$\Delta < 0$ ناقصية "م ت ج خ ح" ناقصية

أمثلة

(1) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad r - \frac{1}{c^2}t = 0$$

$$A = 1,\; B = 0,\; C = -\frac{1}{c^2}$$

$$\Delta = B^2 - 4(A)(C) = +4\frac{1}{c^2} > 0 \Rightarrow$$ زائدية م.ت.ج.خ.ح

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + R\frac{\partial z}{\partial t} = 0$

موجة متخامدة

$r - \frac{1}{c^2} t + Rq = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} A=1,\ B=0,\ C=-\frac{1}{C^2} \\ \Delta = \frac{4}{C^2} > 0 \end{array} \right.$ م.ت.ج.ج.خ.ج زائدية

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$r + t = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ B=0 \\ C=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = -4$ م.ت.ج.ج.خ.ج ناقصة

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ معادلة الانتشار الحراري

$r - \frac{1}{h^2} q = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} A=1,\ B=C=0 \\ \Delta = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ م.ت.ج.ج.خ.م مكافئية

معادلة أولر

$Ar + Bs + Ct = 0$; أعداد ثابتة $A, B, C \in \mathbb{R}$

وهي حالة خاصة من الـ(م.ت.ج.ج.خ.م)

- اذا كانت زائدية أو ناقصة يكون الحل العام بالعلاقة

• $Z(x,y) = F(x+\lambda_1 y) + G(x+\lambda_2 y)$

حيث λ_1, λ_2 هي جذور المعادلة المميزة ;

$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$

• $Z(x,y) = F(\lambda_1 x + y) + G(\lambda_2 x + y)$

حيث λ_1, λ_2 جذور المعادلة المميزة ;

$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$

أما اذا كانت المعادلة التفاضلية مكافئية فيكون الحل العام من الشكل

$Z(x,y) = F(x+\lambda y) + G(x+\lambda y)$