المحاضرة السادسة عشرة

مجالات الثقة - التقدير المجالي

تعريف: ليكن X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي يتبع وسيطاً مجهولاً θ ولنفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير X وأن L_1 و L_2 إحصاءات على أساس العينة المفروضة عندئذٍ نقول عن المجال $[L_1, L_2]$ إنه مجال الثقة لـ θ بمستوى $100(1-\alpha)\%$ من الثقة إذا كان

$$p(L_1 \le \theta \le L_2) = 1-\alpha$$

مبرهنة: إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي طبيعي X متوسطه μ مجهول و تباينه σ^2 معلوم فإن المجال

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + Z_{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

هو مجال الثقة للمتوسط μ بمستوى من الثقة $100(1-\alpha)\%$ ، أي نقول إننا واثقون بمقدار $(1-\alpha)$ من أن μ لن يقل عن $\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ولن يزيد عن $\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ملاحظة:

بفضل مبرهنة النهاية المركزية فإن المبرهنة السابقة محققة من أجل العينات العشوائية من مجتمعات غير طبيعية ذات التباين المعلوم ومن الحجم $(n \ge 30)$.

نتائج: $\boxed{1}$ من المبرهنة يكون

$$p\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$\boxed{2}$ نلاحظ أننا عندما نقدر متوسط المجتمع μ بمتوسط العينة $\bar{X}$ نرتكب خطأً، فإذا رمزنا للخطأ المرتكب بـ (e) وهو الخطأ المطلق الأعظمي المرتكب عند مستوى الثقة $(1-\alpha)$ ويعطى بالعلاقة

$$e = \left| \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right|$$

وبالتالي فإن الخطأ المطلق يتناقص بازدياد (n) أي يمكن التحكم بالخطأ بواسطة حجم العينة.

$\boxed{3}$ إذا أردنا تعيين حجم العينة بحيث لا يتجاوز الخطأ المرتكب المقدار (ε) بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ فيجب من المتراجحة

$$n \ge \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

تمرين: من مجتمع طبيعي متوسطه (μ) مجهول وتباينه $\sigma^2 = 16$ سحبنا عينة عشوائية $n = 20$

فكان متوسطها $\bar{X} = 9$ والمطلوب:

1- أوجد مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع μ.

2- كم ينبغي أن يكون حجم العينة بحيث لا يتجاوز الخطأ في تقدير μ وبثقة 95%

المقدر $\varepsilon = 0.75$.

الحل: لدينا $X \sim N(\mu, 16)$ و $n = 20$ و $\bar{X} = 9$

نعلم أن

$$\mu \in \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + Z_{1+\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

ولنحسب قيمة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي. نجد $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

ومنه فإن مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع μ هو

$$\left[9 - 1.96 \frac{4}{\sqrt{20}} \; ; \; 9 + 1.96 \frac{4}{\sqrt{20}} \right] = [7.247 \; ; \; 10.753]$$

$\boxed{2}$ بما أن n تحقق العلاقة

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{(1.96)(4)}{0.75} \right)^2 = 109.272$$

أي ينبغي أن يكون حجم العينة $n \geq 110$

تمرين:

أجريت معايرة لكمية في الدم لعينة مؤلفة من 36 طفل فكان متوسط كمية الخضاب لديهم

11.3 فإذا كانت العينة المختارة من مجتمع الانحراف المعياري فيه لكمية خضاب الدم هي 2.5g

والمطلوب: عيّن مجال ثقة تقريبي لمتوسط كمية خضاب الدم لمجتمع الأطفال الذي أخذت منه

العينة بمعامل ثقة 98%.

الحل بما أن $n = 36 > 30$ فيمكن وضع مجال ثقة تقريبي لـ μ وذلك حسب مبرهنة

النهاية المركزية ولدينا

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي فإن $Z_{0.99} = 2.33$ وذلك لأن أقرب قيمة في الجدول

من 0.99 هي 0.9901

فيكون مجال الثقة لـ μ هو

$$\left[\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[11.3-(2.33)\left(\frac{2.5}{6}\right);\,11.3+(2.33)\left(\frac{2.5}{6}\right)\right]=\left[10.329;12.271\right]$$

ملاحظة: في الحالة التي يكون فيها تباين المجتمع σ^2 مجهولاً ومن أجل العينات ذات الحجم $n \geq 30$ يكون تباين العينة S^2 مقدراً جيداً لـ σ^2 ويكون مجال الثقة لـ μ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ هو

$$\left[\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

والخطأ الأعظمي في تقدير μ هو

$$e=\left|\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right|$$

وحجم العينة التي ينبغي سحبها لا يتجاوز الخطأ المقدر (ε) هو: $n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot S}{\varepsilon}\right)^2$

بحيث أن

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}\right)$$

تمرين:

مالك سيارة يريد أن يعرف المتوسط الأسبوعي للمسافة التي يقطعها بالكيلومتر وقد سجل المسافات المقطوعة في (49) أسبوعاً متتالياً ووجد أن متوسطها (230) كيلومتر في الأسبوع بانحراف معياري (80) كيلومتر والمطلوب:

أوجد 96% مجال الثقة لمتوسط ما يقطعه في الأسبوع

الحل: بما أن $n=49>30$ فيمكن أن نعتبر أن $\sigma=S=80$ ولدينا

$$1-\alpha=0.96 \Rightarrow \alpha=0.04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.98$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نلاحظ أن

$$Z_{0.9793}<Z_{0.98}<Z_{0.9803} \Rightarrow 2.05<Z_{0.98}<2.06$$

$$\Rightarrow Z_{0.98}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$$

فيكون مجال الثقة لمتوسط ما يقطعه في الأسبوع بثقة 96% هو

$$\left[\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right]=\left[(230)-(2.055)\left(\frac{80}{7}\right);\,(230)+(2.055)\left(\frac{80}{7}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \mu\in\left[206.514;253.485\right]$$

وهو مجال الثقة لمتوسط متغير عشوائي طبيعي تباينه مجهول.

ملاحظة: في الحالة التي يكون فيها $n<30$ فإن تغيرات s^2 تغدو مؤثرة في شكل توزيع الإحصاء $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$

ويصبح توزيع هذا الإحصاء مختلفاً عن التوزيع الطبيعي المعياري وحسب مبرهنة يكون للمتغير: $T=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$; $T\sim t(n-1)$

توزيع t ستيودنت ب $(n-1)$ درجة من الحرية.

مبرهنة: إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي طبيعي X متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهولاً فإن مجال الثقة للمتوسط μ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ هو المجال

$$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

تمرين: قسنا ارتفاع خمس عشرة شجيرة باذنجان بعد فترة من زراعتها فكان متوسط الارتفاع 83 سم بانحراف معياري 5.8 سم والمطلوب:
أوجد 95 % مجال الثقة لمتوسط الارتفاع في المجتمع الذي اخترنا الشجيرات منه مفترضاً أن ارتفاع الشجيرة يخضع للتوزيع الطبيعي.

الحل

بما أن $n=15<30$ فإنه حسب المبرهنة السابقة يكون للعينة توزيع t - ستيودنت ولدينا:

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.975$$

ومن جدول توزيع t - ستيودنت:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.975}(14)=2.14$$

فيكون مجال الثقة لـ μ بثقة 95 % هو:

$$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=\left[83-2.14\frac{5.8}{\sqrt{15}} ; 83+2.14\frac{5.8}{\sqrt{15}}\right] \Rightarrow \mu\in[79.795 ; 86.2044]$$

تمرين: في دراسة اختبارات لتجميع وتركيب قطع آلية معينة استغرق وقت التجميع والتركيب 13، 12، 11، 13، 16، 14 دقيقة. مفترضاً أن زمن التجميع والتركيب يتبع التوزيع الطبيعي والمطلوب: ضع فترة ثقة للمتوسط الزمني الحقيقي للتجميع والتركيب بمعامل ثقة 99%.

الحل نحسب المتوسط والانحراف المعياري للعينة

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}(12+11+13+16+14+13) = 13.167$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{5}\left(144+121+169+256+196+169-(6)(13.167)^2\right)$$

$$\Rightarrow S^2 = 2.967 \Rightarrow S = 1.722$$

ولدينا

$$1-\alpha = \quad \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$$

وبما أن $n = 6 < 30$ فإنه يكون للعينة توزيع t ستودنت ومن جدول توزيع t ستودنت فإنه:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.995}(5) = 4.03$$

فيكون مجال الثقة للمتوسط الزمني بثقة 99% هو:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[13.167 - 4.03\left(\frac{1.722}{\sqrt{6}}\right) ; 13.167 + 4.03\left(\frac{1.722}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \mu \in [10.333 ; 16.0001]$$

انتهت المحاضرة السادسة عشرة