الأربعاء: 2015 / 4 / 8

المحاضرة التاسعة:

تتمة خواص التطابقات:

7) مبرهنة:

إذا كان $ka \equiv kb \pmod{m}$ وإذا كان $d = (k, m)$ فإن

$$a \equiv b \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$$

البرهان:

$$ka \equiv kb \pmod{m} \Rightarrow ka = kb + Mm$$
$$\Rightarrow k(a-b) = M.m \quad (1)$$

وبما أن $(k, m) = d$ فيمكن أن نكتب

$$k = k_0 d \quad , \quad m = m_0 d \quad ; \quad (k_0, m_0) = 1$$

نعوض في (1)

$$k_0 d(a-b) = M m_0 d$$
$$k_0 (a-b) = M m_0$$
$$\Rightarrow m_0 \mid k_0 (a-b) \quad ; \quad (m_0, k_0) = 1$$

$$m_0 \mid a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod{m_0} \quad ; \quad m_0 = \frac{m}{d}$$

نتيجة:

إذا كان $d = (k, m) = 1$ و $ka \equiv kb \pmod{m}$ فإن

$$a \equiv b \pmod{m}$$

مثال:

$10 \equiv 6 \pmod 4$; $2.5 \equiv 2.3 \pmod 4$

ولكن $5 \not\equiv 3 \pmod 4$ لأن $(6,10) = 2 \neq 1$ (نتيجة)

في حين $5 \equiv 3 \pmod 2$ (نظرية)

نتيجة:

إذا كان $ca \equiv cb \pmod p$ حيث p عدد أولي لا يقسم c

فإن

$a \equiv b \pmod p$ وذلك لأن $(a,p) = 1$ في هذه الحالة.

8) إذا كان $a \equiv b \pmod m$ وكان $n | m$ فإن $a \equiv b \pmod n$ تمرين في سائل

البرهان:

لدينا $a - b = Mm \Leftarrow m | a-b$ و $n | m \Leftarrow n | a-b$

ومنه

$a \equiv b \pmod n$

9) مبرهنة:

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ و $m_i \in \mathbb{Z}^+$ حيث $i = 1, \ldots, k$

وإذا كان

$a \equiv b \pmod{m_i}$ فإن $a \equiv b \pmod m$ حيث

$m = \operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_k)$

البرهان:

لدينا $m_i | a-b$ ولما كان $m_i | m$ من أجل $1 \leq i \leq k$

فإن $a-b$ مضاعف مشترك للأعداد m_i فهو مضاعف للمضاعف المشترك

الأصغر m أي $m | a-b$ و

$a \equiv b \pmod m$

نتيجة:

إذا كانت m_i أولية نسبياً مثنى مثنى فإن $m = m_1 m_2 \dots m_k$ أولية نسبياً و

فإذا كان $a \equiv b \pmod{m_i}$ من أجل

$i = 1, 2, \dots, k$ فإن $a \equiv b \pmod{m_1 m_2 \dots m_k}$

وحالة خاصة:

إذا كان $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ هو الشكل القانوني لـ m فإن:

$a \equiv b \pmod{p_i^{\alpha_i}} \Longrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ حيث $i = 1, 2, \dots, k$

15) مبرهنة: (هامة)

إذا كان $a \equiv b \pmod{p^r}$ حيث a, b, r أعداد صحيحة و $r \geq 1$ و

p عدداً أولياً، فإن:

$a^{p^s} \equiv b^{p^s} \pmod{p^{r+s}}$ حيث $s \geq 0$

البرهان:

بطريقة الاستقراء الرياضي على s.

خطوة البداية:

من أجل $s = 0$ نجد $a \equiv b \pmod{p^r}$ محققة.

خطوة الاستقراء:

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $s = k \geq 0$ ولنبرهن صحتها من أجل $s = k+1$

فنكتب

$$s = k \Rightarrow a^{p^k} \equiv b^{p^k} \pmod{p^{r+k}}$$

$$\Rightarrow a^{p^k} = b^{p^k} + M \cdot p^{r+k}$$

نرفع الطرفين إلى القوة p فنجد:

$$\left(a^{p^k}\right)^p = a^{p^{k+1}} = \left(b^{p^k} + M \cdot p^{r+k}\right)^p$$

$$a^{p^{k+1}} = b^{p^{k+1}} + \frac{p}{1}(b^{p^k})^{p-1}(M.p^{r+k}) + \frac{p(p-1)}{2!}(b^{p^k})^{p-2}(M.p^{r+k})^2 + \dots + M^p (p^{r+k})^p$$

$$a^{p^{k+1}} = b^{p^{k+1}} + p^{r+k+1} . b^{p^k(p-1)} M - \frac{1}{2} p^{2r+2k+1} M^2 (b^{p^k})^{p-2} + \frac{1}{2} p^{2+2r+2k} . (b^{p^k})^{p-2} . M^2 + \dots + M^p p^{pr+pk}$$

نلاحظ ابتداءً من الحد الثاني كل الحدود التي تحوي p يكون أسس p من الشكل:

$$r+k+1 \ , \ 2r+2k+1 \ , \ 2r+2k+2 \ , \dots , \ pr+pk$$

كلها أكبر من $r+k+1$ وتطابق الصفر بالمقاس p^{r+k+1}

$$a^{p^{k+1}} \equiv b^{p^{k+1}} \pmod{p^{r+k+1}}$$

أي أن العلاقة محققة من أجل $s=k+1$ وبالتالي هي محققة من أجل $s \geq 0$

تمرين:

أثبت أن الفرق بين أي عدد صحيح N بالنظام العشري ومجموع أرقامه تقبل القسمة على 9

الحل:

إن العدد N يكتب بالنظام العشري كما نعلم على النحو:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

ومعلوم أن $10 \equiv 1 \pmod 9$ فإن: $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 9$ حيث $n \geq 1$

وبالتالي:

$$N = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 9$$

ومنه:

$$N - \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0 \pmod 9$$

$$\Rightarrow 9 \mid N - \sum_{i=0}^{n} a_i$$

وعلى سبيل المثال:

$$76825 - (7+6+8+2+5) = 76825 - 28$$
$$= 76797$$

$$\Rightarrow 9 \mid 76797 \quad ; 76797 = 9 \times 8533$$

تمرين: (3) صفحة (88)

أثبت أن $8 \mid 3^{2n} + 7$ من أجل $n \geq 0$

الحل:

إن:

$$3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 3^{2n} \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 3^{2n} + 7 \equiv 1 + 7 \pmod 8$$

وبالتالي:

$$8 \mid 3^{2n} + 7 \quad \text{أي} \quad 3^{2n} + 7 \equiv 0 \pmod 8$$

تمرين: (5) صفحة (89)

أوجد باقي قسمة $\sum_{1}^{1000} k!$ على 24 ؟

الحل:

نعلم أن: $4! = 24$ ، $5! = (4!)5$ ----

لذا نكتب:

$$\sum_{1}^{1000} k! = 1+2!+3!+4!+5!+\cdots+1000!$$

وبما أن:

$$\sum_{k=1}^{1000} k! \equiv (1+2!+3!) \pmod{24}$$

حيث الحدود بدءاً من !4 تطابق الصفر بالمقاس 24

$$\sum_{k=1}^{1000} k! \equiv 9 \pmod{24}$$

وباقي القسمة يساوي 9

تمرين:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب k يحقق العلاقة:

$$31 \mid 33(26)^2 - k$$

الحل:

العدد المطلوب هو k باقي قسمة $33(26)^2$ على 31 لذا نكتب:

$$33(26)^2 \equiv k \pmod{31}$$

ولما كان:

$26 \equiv -5 \pmod{31}$ و $33 \equiv 2 \pmod{31}$

فإن:

$$(26)^2 \equiv 25 \pmod{31}$$

أي أن: $33(26)^2 \equiv 50 \pmod{31}$

وأخيراً

$k = 19$ و $33(26)^2 \equiv 19 \pmod{31}$

$19 = 50 - 31$, كون الباقي أكبر من المقسوم عليه (للحصول على أصغر عدد)

انتهت المحاضرة.