المحاضرة السادسة عشر

⊛ لتكن z_0 شاذة معزولة لتابع عقدي f عندئذ يمكن نشر التابع f وفق لوران في جوار z_0 أي في حلقة مركزها z_0 ونصف قطرها الداخلي معدوم أي في حلقة من الشكل $ann(z_0, 0, r)$ وليكن هذا النشر معطى بالمساواة:

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}}_{\text{الجزء الرئيسي للنشر}}$$

$$\underbrace{+ a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots}_{\text{الجزء التحليلي (الصحيح) للنشر}} \quad \forall z \in ann(z_0, 0, r)$$

تعريف:

نسمي العدد العقدي a_{-1} براسب (باقي) التابع f عند z_0 ويرمز له بـ $Res(f, z_0)$

أو اختصاراً إذا كان لا يوجد سوى تابع واحد نرمز له بـ $Res(z_0)$

ومن مبرهنة لوران نجد:

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

حيث γ هي دائرة مركزها z_0 ولا تحوي أي نقطة شاذة لـ f سوى z_0.

(ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب ↻)

إلا إذا ذكر خلاف ذلك بشكل صريح

⊛ يرمز للدائرة مركزها الصفر ممسوحة بالاتجاه الموجب بـ $C^+(0,1)$

وللاتجاه السالب $C^-(0,1)$

دساتير حساب الراسب عند نقطة شاذة:

نفرض z_0 نقطة شاذة معزولة:

① إذا كانت z_0 كاذبة فإن $Res(f, z_0) = 0$

/ /

ⓒ إذا كانت z_0 قطباً للتابع f من المرتبة m:

A) $m=1$ أي z_0 قطب بسيط وعندئذ يكون شكل نشر لوران لـ f في جوار z_0

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

نضرب الطرفين بـ $(z-z_0)$ ونأخذ النهاية

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\left(a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+\cdots\right)$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=a_{-1}=Res(f,z_0)$$

وهو دستور حساب الراسب عند نقطة شاذة

* ملاحظة: لا يمكن لراسب تابع f أن يكون عند قطب بسيط له معدوماً.
(لأنه لو كان معدوماً لما كانت z_0 شاذة صادقة قطبية
بل كانت شاذة كاذبة).

B) $m\geq 2$ z_0 قطب مضاعف عندئذ يكون شكل النشر
وفق لوران في جوار z_0 هو:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

نضرب الطرفين بـ $(z-z_0)^m$

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+(a_{m+1})(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$
$$+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

نشتق الطرفين $(m-1)$ مرة ونأخذ نهاية الطرفين

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!\,a_{-1}+0$$

$$\Rightarrow\ Res(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{(m+1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

C) إذا كانت z_0 نقطة شاذة أساسية فلا يوجد دستور لحساب
الراسب عندها إلا من خلال النشر بجوارها وفق لوران.
أو أن نستخدم دستور التكامل $a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz$

تمرين ١: عين النقطة الشاذة للتابع $f(z)=z^4\sin\frac{1}{z}$ وبين نوعها واحسب الراسب لـ f عندها واحسب $\int_{|z|=2} z^4\sin\frac{1}{z}\,dz$

الحل:

النقطة الشاذة الوحيدة لـ f هي $z=0$ لأن f غير معرف عندها
و f تحليلي عند أي $z\neq 0$ لأنه جداء تابعين تحليليين عند أي $z\neq 0$

نشر تايلور للتابع $(\sin u)$: $\sin u = u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\frac{u^7}{7!}+\cdots \quad \forall u\in\mathbb{C}$

نفرض $u=\frac{1}{z}\in\mathbb{C}^*$ نشر التابع f

$$f(z)=z^4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}-\frac{1}{7!\,z^7}+\cdots\right) \quad \forall z\in\mathbb{C}^*$$

$$=z^3-\frac{z}{3!}+\underbrace{\frac{1}{5!\,z}-\frac{1}{7!\,z^3}+\cdots}_{\text{الجزء الرئيسي للنشر جوار الصفر}}$$

$\Leftarrow$ $z=0$ نقطة شاذة أساسية لأن عدد حدود الجزء الرئيسي لنشر لوران في جوار $z=0$ غير منته

وإن $Res(f,z)=a_{-1}=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$

$|z|=2$ هي دائرة مركزها $z=0$ ونصف قطرها 2

نعتبر الدائرة ممسوحة مرة واحدة وبالاتجاه الموجب

$|z|=2 \xleftrightarrow[\text{وسيطياً}]{\text{اصطلاحاً}} z=2e^{it} \quad t\in[0,2\pi]$

إن الدائرة $|z|=2$ واقعة في الحلقة $\mathbb{C}^*$

$$\frac{1}{120}=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} z^4\sin\frac{1}{z}\,dz \quad \forall z\in\mathbb{C}^*$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=2} z^4\sin\frac{1}{z}\,dz=2\pi i\,Res\left(z^4\sin\frac{1}{z},0\right)=\frac{2\pi i}{120}=\frac{\pi i}{60}$$

لو كانت الدائرة ممسوحة 5 مرات لكان ناتج التكامل 5 أضعاف الناتج عن مسح الدائرة مرة واحدة.

تمرين 2: أوجد النقاط الشاذة للتابع $f(z)=\dfrac{z^2-3iz}{z^2(z^2+9)^2(z-2i)}$

عين النقاط الشاذة وبين نوع كل منها واحسب الراسب عند كل منها.

الحل

النقاط الشاذة لـ f هي: $z=0,\ z=2i,\ z=-3i,\ z=3i$

(نأخذ أسرع طريقة للحسابات لكسب الوقت بالامتحان)

- $(z=0)$ هي صفر من المرتبة الثانية للمقام

وهي صفر من المرتبة الأولى (بسيط) للبسط لأن:

$$z^2-3iz\Big|_{z=0}=0 \quad , \quad 2z-3i\Big|_{z=0}\neq 0$$

$\Leftarrow$ $z=0$ هي قطب بسيط (من المرتبة $2-1=1$)

$$Res(f,0)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z-3iz}{(z^2+9)^2(z-2i)}=\frac{-3i}{9(-2i)^2}=\frac{-i}{12}$$

- $(z=3i)$

$$\text{المقام}=z^2(z^2+9)(z-2i)=(z-3i)\,z^2(z+3i)(z-2i)^2$$

لا ينعدم عند $(3i)$

$\Leftarrow$ $z=3i$ صفر بسيط للمقام وهو صفر بسيط للبسط

لأن البسط $=z(z-3i)$

$\Leftarrow$ $z=3i$ شاذة كاذبة لـ f

$\Leftarrow$ $Res(f,3i)=0$

- $(z=-3i)$

$z=-3i$ تعدم المقام مرة واحدة $\Leftarrow$ صفر بسيط للمقام

وهو صفر من المرتبة صفر للبسط $\Leftarrow$ $z=-3i$ قطب بسيط للتابع

$$Res(f,-3i)=\lim_{z\to -3i}(z+3i)f(z)=\lim_{z\to -3i}\cancel{(z+3i)}\frac{z(z-3i)}{z^2(z-3i)\cancel{(z+3i)}(z-2i)^2}$$

$$=\lim_{z\to -3i}\frac{\cancel{z}\cancel{(z-3i)}}{z^{\cancel{2}}\cancel{(z-3i)}(z-2i)}=\frac{(-3i)\cancel{(-3i-3i)}}{(-3i)^2\cancel{(-3i-3i)}(-3i-2i)}=\frac{1}{(-3i)(-5i)}=-\frac{1}{15}$$

$(z=2i)$ -

z صفر من المرتبة 2 للمقام لأن المقام مكتوب بالشكل $(z-2i)^2$
مضروب بتابع لا ينعدم عند $(2i)$.
وهي صفر من المرتبة صفر للبسط (لا تعدم البسط)

⇐ $z=2i$ هي قطب مضاعف للتابع f من المرتبة الثانية $(2-0=2)$

$$Res(f,2i)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)^2 f(z)\right]'$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{\cancel{(z-2i)^2}\,\cancel{z}\,\cancel{(z-3i)}}{z^{\cancel{2}}\cancel{(z-3i)}(z+3i)\cancel{(z-2i)^2}}\right]'=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{1}{z^2+3iz}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{-(2z+3i)}{(z^2+3iz)^2}\right]=\left[\frac{-(4i+3i)}{(-4-6)^2}\right]=\frac{-7i}{100}$$

$$\Rightarrow Res(f,2i)=\frac{-7i}{100} \quad \#$$

انتهت المحاضرة السادسة عشر