Subject: / /

نمذجة رياضية

المحاضرة التاسعة عشرة

١٠/٥/٢٠١٥

البرمجة الديناميكية

مجالات الاستخدام:
تستخدم لإيجاد الحل الأمثل في المواقف متعددة الخطوات والتي تتضمن مجموعة من القرارات المرتبطة.

أمثلة: مسائل توزيع الموارد وتنظيم الإنتاج والإدارة.
مسائل التخزين.

منهج الاستنتاج للبرمجة الديناميكية: (من الخلف إلى الأمام)
المبدأ هو تجزئة المسألة إلى خطوات ترتبط بمعيار معين حسب الموقف موضوع الدراسة وفي كل خطوة تعرف مجموعة من الحالات، حيث يتفرع عن كل حالة مجموعة من القرارات الممكنة.

- مقياس الفعالية: يحدد مقياس الفعالية في صورة تكلفة أو ربح أو زمن أو أي مقياس آخر، ويسمى تابع الهدف.

- القرار الأمثل: هو الذي يحقق في كل حالة القيمة المثلى لتابع الهدف في الحالة السابقة.

* إن من أبرز المساهمين في تطوير هذه النظرية وتطبيقاتها:
العالم "ريتشارد بالمان" صاحب المبدأ القائل:
(إن سياسة مثلى لا يمكن أن تتشكل إلا من سياسات جزئية مثلى)
وهو المبدأ النظري والأساسي للبرمجة الديناميكية.

Subject: / /

مميزات البرمجة الديناميكية :

تتميز البرمجة الديناميكية عن غيرها من الطرق بما يلي :

1) تعطي الحل الأمثل المطلق وليس الحل الأمثل النسبي .
2) تخفض الزمن اللازم للحساب من جراء تجزئة المسألة إلى مسائل صغيرة، وبعدد أقل من المتغيرات ، وبذلك تنخفض عدد البدائل في كل خطوة .
3) لا تتطلب أياً من الشروط الخطية أو التحدب أو حتى الاستمرارية ومع ذلك فهي محددة ضمن أشكال خاصة لتابع الهدف .
4) إن هذه الطريقة تتضمن عناصر تحليل الحساسية ، حيث يبين من خلالها حساسية النتائج من أجل جملة من القيم للمتغيرات الداخلة في المسألة وتمكننا من إيجاد السياسات القريبة للسياسة المثلى .

- مع الإشارة إلى أنها لا تستطيع حل كل أنواع المسائل .

* تصنف مسائل البرمجة الديناميكية وفق ثلاث حالات :

١- مسائل وحيدة البعد ووحيدة المؤثر .
٢- مسائل متعددة الأبعاد ووحيدة المؤثر أو مسائل وحيدة البعد ومتعددة المؤثرات .
٣- مسائل متعددة الأبعاد ومتعددة المؤثرات .

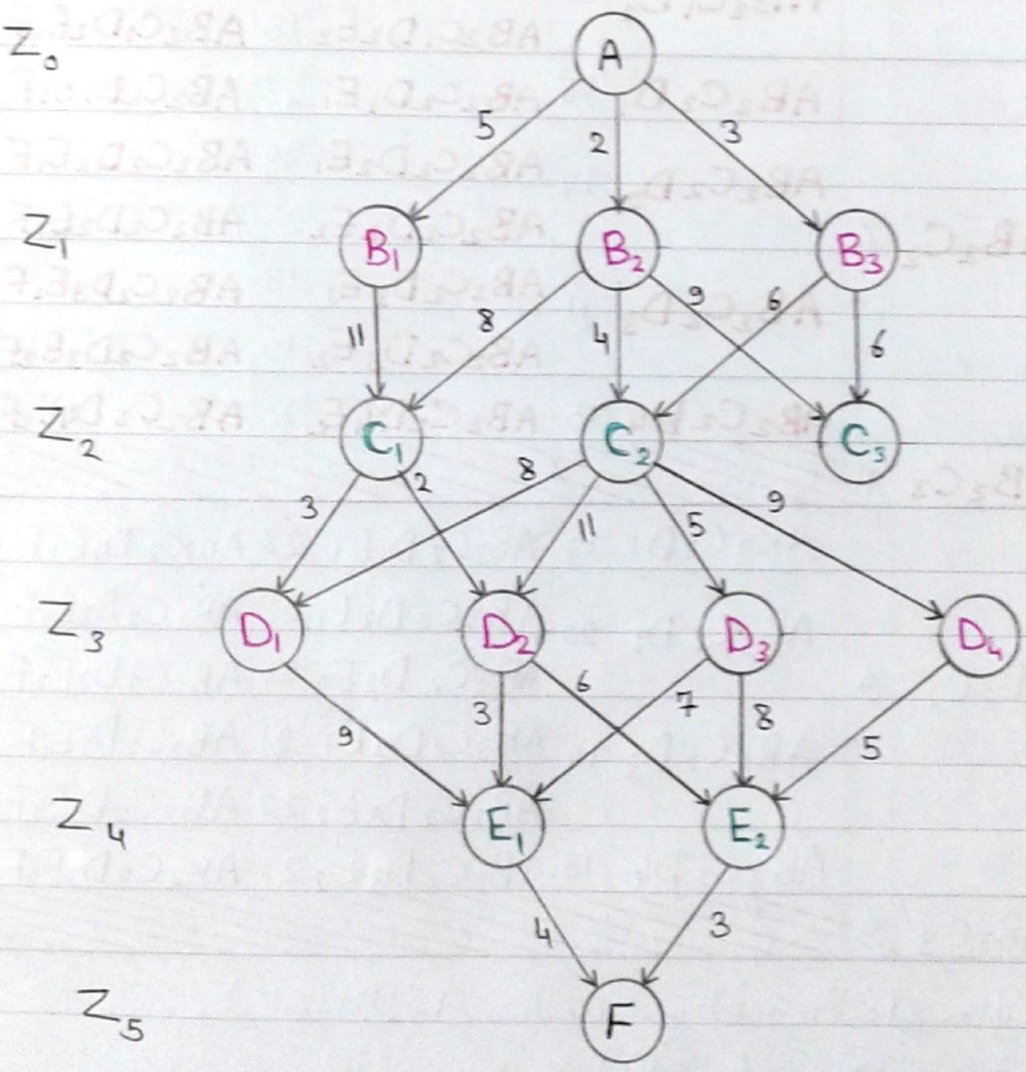
- تعريف البعد : هو المعيار الذي يؤثر في عملية اتخاذ القرار في مرحلة معينة من مراحل الحصول على الحل الأمثل ، حيث أنه إذا كان المعيار وحيداً في اتخاذ القرار عندئذٍ نسمي المسألة وحيدة البعد ، وإلا فهي مسألة متعددة الأبعاد .

- تعريف المؤثر : هو تابع الهدف ، وإذا كانت المسألة تبغي أكثر من هدف واحد ، عندها نسميها مسألة متعددة المؤثرات .

مثال: يطلب إنشاء أوتوستراد بين المدينتين A,F ، حيث يجب على هذا الأوتوستراد أن يمر من المدن B, C, D, E وبالتالي سوف يتشكل من جملة أقسام.

من أجل كل قسم تمت دراسة وتقييم كلفة مختلف البدائل ، وقد تم تمثيل هذه البدائل مع تكاليفها على الشكل المرفق.

المطلوب : إيجاد الطريق ذات الكلفة الأقل لإنشاء الأوتوستراد.



الحل: لحل مثل هذه المسألة من المنطق إنشاء الجدول التالي :

Subject: / /

Z_0	Z_1		Z_2		Z_3		Z_4		Z_5	
A	AB_1	5	AB_1C_1	16	$AB_1C_1D_1$	19	$AB_1C_1D_1E_1$	28	$AB_1C_1D_1E_1F$	32
					$AB_1C_1D_2$	18	$AB_1C_1D_2E_1$	21	$AB_1C_1D_2E_1F$	25
							$AB_1C_1D_2E_2$	24	$AB_1C_1D_2E_2F$	27
	AB_2	2	AB_2C_1	10	$AB_2C_1D_1$	13	$AB_2C_1D_1E_1$	22	$AB_2C_1D_1E_1F$	26
					$AB_2C_1D_2$	12	$AB_2C_1D_2E_1$	15	$AB_2C_1D_2E_1F$	19
							$AB_2C_1D_2E_2$	18	$AB_2C_1D_2E_2F$	21
			AB_2C_2	6	$AB_2C_2D_1$	14	$AB_2C_2D_1E_1$	23	$AB_2C_2D_1E_1F$	27
					$AB_2C_2D_2$	17	$AB_2C_2D_2E_1$	20	$AB_2C_2D_2E_1F$	24
							$AB_2C_2D_2E_2$	23	$AB_2C_2D_2E_2F$	26
					$AB_2C_2D_3$	11	$AB_2C_2D_3E_1$	18	$AB_2C_2D_3E_1F$	22
							$AB_2C_2D_3E_2$	19	$AB_2C_2D_3E_2F$	22
					$AB_2C_2D_4$	15	$AB_2C_2D_4E_2$	20	$AB_2C_2D_4E_2F$	23
			AB_2C_3	11						
	AB_3	3	AB_3C_2	9	$AB_3C_2D_1$	17	$AB_3C_2D_1E_1$	26	$AB_3C_2D_1E_1F$	30
					$AB_3C_2D_2$	20	$AB_3C_2D_2E_1$	23	$AB_3C_2D_2E_1F$	27
							$AB_3C_2D_2E_2$	26	$AB_3C_2D_2E_2F$	29
					$AB_3C_2D_3$	14	$AB_3C_2D_3E_1$	21	$AB_3C_2D_3E_1F$	25
							$AB_3C_2D_3E_2$	22	$AB_3C_2D_3E_2F$	25
					$AB_3C_2D_4$	18	$AB_3C_2D_4E_2$	23	$AB_3C_2D_4E_2F$	26
			AB_3C_3	9						

حيث يعطينا هذا الجدول تكاليف جميع الطرق المرحلية والكلية الممكنة،
بحيث يمكننا من خلاله اختيار حل أمثل مرحلي ذو تكلفة صغرى في كل مرحلة

ومن العمود الأخير نجد أن الحل الأمثل الكلي هو الطريق : $AB_2C_1D_1E_1F$
ذو التكلفة 19

Subject: / /

ولكن هنا الحل لا يعتبر حلاً رياضياً، حيث أن مثل هذه المسائل يتم حلّه باستخدام البرمجة الديناميكية كما يلي:

لدينا:

Z_0: A

Z_1: B_1 B_2 B_3

Z_2: C_1 C_2 C_3

Z_3: D_1 D_2 D_3 D_4

Z_4: E_1 E_2

Z_5: F

يتم حساب الحل بالتدريج مرحلة تلو الأخرى باستخدام التابع التالي:

$$G_n(Z_n) = \underset{Z_{n-1}}{opt}\left[G_{n-1}(Z_{n-1}) + F(Z_n, Z_{n-1})\right]$$

حيث أن التابع opt قد يكون min أو max حسب طبيعة المسألة.

وفي مسألتنا هذه هو من النوع min لأننا نريد أقل كلفة.

ولكن نحن دوماً بحاجة إلى حالة ابتدائية، وهي في مسألتنا:

$$G_0(Z_0) = G_0(A) = 0$$

وبحيث $F(Z_n, Z_{n-1})$ هنا هو كلفة الطريق بين النقطتين المأخوذتين.

* لنأخذ الحالة Z_1، عندئذٍ يكون:

$$G_1(Z_1) = \underset{Z_0}{\min}\left[G_0(Z_0) + F(Z_1, Z_0)\right]$$

لدينا في المرحلة Z_1 ثلاثة خيارات هي B_1, B_2, B_3 ندرس كل منها على حدة:

$$G_1(B_1) = \min\left[G_0(A) + F(B_1, A)\right] = 5$$

$$G_1(B_2) = \min\left[G_0(A) + F(B_2, A)\right] = 2 \leftarrow$$

$$G_1(B_3) = \min\left[G_0(A) + F(B_3, A)\right] = 3$$

ومنه فإن الحل الأمثل المرحلي هنا هو الطريق AB_2 ذو الكلفة 2

Subject: / /

* الآن لننتقل إلى الحالة Z_2 :

$$G_2(Z_2) = \min_{Z_1} \left[G_1(Z_1) + F(Z_2, Z_1) \right]$$

لدينا في هذه المرحلة ثلاثة خيارات C_1, C_2, C_3 لندرس كل منها :

$$G_2(C_1) = \min \{ G_1(B_1) + F(C_1, B_1), G_1(B_2) + F(C_1, B_2), G_1(B_3) + F(C_1, B_3) \}$$
$$= \min \{ 5 + 11, \underline{2 + 8}, 3 + \infty \} = 10$$

$$G_2(C_2) = \min \{ G_1(B_1) + F(C_2, B_1), G_1(B_2) + F(C_2, B_2), G_1(B_3) + F(C_2, B_3) \}$$
$$= \min \{ 5 + \infty, \underline{2 + 4}, 3 + 6 \} = 6 \leftarrow$$

$$G_2(C_3) = \min \{ G_1(B_1) + F(C_3, B_1), G_1(B_2) + F(C_3, B_2), G_1(B_3) + F(C_3, B_3) \}$$
$$= \min \{ 5 + \infty, 2 + 9, \underline{3 + 6} \} = 9$$

ومنه فإن الحل الأمثل المرحلي هو الطريق AB_2C_2 ذو الكلفة 6

- كيف وصلنا على هذا الطريق؟
إنّ $G_2(C_2) = 6$ هي القيمة الصغرى في تكاليف الطرق المؤدية إلى الحالة Z_2 :
وإن القيمة المثلى 6 أتت في $G_2(C_2)$ من النقطة B_2
والتي بدورها تأتي من النقطة A .

- وإن هذه النتيجة تتطابق تماماً مع النتيجة في الجدول المشكل مسبقاً
وسيتم تراكم جميع الطرق فيما بعد بنفس الطريقة .

Subject: / /

* في المرحلة Z_3 لدينا أربعة خيارات : D_1, D_2, D_3, D_4 ويكون :

$$G_3(Z_3) = \min_{Z_2} \left[G_2(Z_2) + F(Z_3, Z_2) \right]$$

$$G_3(D_1) = \min\{G_2(C_1) + F(D_1,C_1), G_2(C_2) + F(D_1,C_2), G_2(C_3) + F(D_1,C_3)\}$$
$$= \min\{\underline{10+3}, 6+8, 9+\infty\} = 13$$

$$G_3(D_2) = \min\{G_2(C_1) + F(D_2,C_1), G_2(C_2) + F(D_2,C_2), G_2(C_3) + F(D_2,C_3)\}$$
$$= \min\{\underline{10+2}, 6+11, 9+\infty\} = 12$$

$$G_3(D_3) = \min\{G_2(C_1) + F(D_3,C_1), G_2(C_2) + F(D_3,C_2), G_2(C_3) + F(D_3,C_3)\}$$
$$= \min\{10+\infty, \underline{6+5}, 9+\infty\} = 11 \leftarrow$$

$$G_3(D_4) = \min\{G_2(C_1) + F(D_4,C_1), G_2(C_2) + F(D_4,C_2), G_2(C_3) + F(D_4,C_3)\}$$
$$= \min\{10+\infty, \underline{6+9}, 9+\infty\} = 15$$

ومنه فالحل الأمثل المرحلي عند Z_3 هو الطريق $AB_2C_2D_3$ ذو الكلفة 11 .

* في المرحلة Z_4 يكون لدينا الخيارات : E_1, E_2 ويكون :

$$G_4(Z_4) = \min_{Z_3} \left[G_3(Z_3) + F(Z_4, Z_3) \right]$$

$$G_4(E_1) = \min\{G_3(D_1) + F(E_1,D_1), G_3(D_2) + F(E_1,D_2), G_3(D_3) + F(E_1,D_3), G_3(D_4) + F(E_1,D_4)\}$$
$$G_4(E_1) = \min\{13+9, \underline{12+3}, 11+7, 15+\infty\} = 15 \leftarrow$$

$$G_4(E_2) = \min\{G_3(D_1) + F(E_2,D_1), G_3(D_2) + F(E_2,D_2), G_3(D_3) + F(E_2,D_3), G_3(D_4) + F(E_2,D_4)\}$$
$$G_4(E_2) = \min\{13+\infty, \underline{12+6}, 11+8, 15+5\} = 18$$

Subject:

ومنه فالحل الأمثل المرحلي عند Z_4 هو الطريق : $AB_2C_1D_2E_1$
ذو التكلفة 15 .

* في المرحلة Z_5 هناك خيار واحد وهو F . ويكون :

$$G_5(Z_5) = \min_{Z_4}\{G_4(Z_4) + F(Z_5, Z_4)\}$$

$$G_5(F) = \min\{G_4(E_1) + F(F, E_1),\ G_4(E_2) + F(F, E_2)\}$$

$$G_5(F) = \min\{\underline{15 + 4},\ 18 + 3\} = 19$$

ومنه فالحل الأمثل الكلي الشامل هو الطريق : $AB_2C_1D_2E_1F$
ذو التكلفة 19 .

وهذا الجواب يتطابق تماماً مع النتيجة التي حصلنا عليها في الجدول المرسوم في البداية .

نهاية المحاضرة التاسعة عشرة