تمرين 1:

هل يمكن استخدام مبرهنة الرواسب لحساب التكامل $\int_\gamma \bar{z}\, dz$

حيث γ هو المثلث الذي رؤوسه $0 ، 2 ، 2+2i$؟

علل اجابتك. ثم احسب قيمة هذا التكامل.

الحل:

لاستخدام مبرهنة الرواسب في حساب تكامل عقدي يجب أن يتحقق:

(1) منحني المكاملة مغلق. وهذا محقق بالنسبة للتكامل المطلوب. (المثلث).

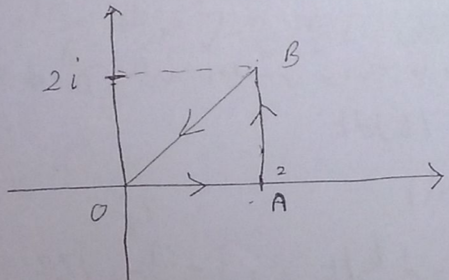
(2) المكامل تحليلي على محيط وداخل منحني المكاملة باستثناء عند عدد منتهٍ من النقاط الشاذة داخل المنحني.

وهذا الشرط غير محقق هنا. حيث أن $f(z)=\bar{z}$ غير تحليلي عند أي نقطة في المستوي z (وبالتالي عند أي نقطة من محيط وداخل المثلث)

وسبب ذلك أنه f غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة لأنه لا يحقق شرطي كوشي - ريمان عند أي نقطة.

* اذا رمزنا للنقطة الممثلة للعدد 2 بـ A والنقطة الممثلة للعدد $2+2i$ بـ B

فإنه: $\gamma = OABO$ أي أن:



$$\gamma = [OA] \oplus [AB] \oplus [BO]$$

وإن:

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_{[OA]} \bar{z}\, dz + \int_{[AB]} \bar{z}\, dz + \int_{[BO]} \bar{z}\, dz$$

$[OA]: \gamma_1(t) = t \ : 0 \le t \le 2$. $[AB]: \gamma_2(t) = 2 + it \ : 0 \le t \le 2$

$[BO]: \gamma_3(t) = (1-t)B + tO = (1-t)(2+2i) \ : 0 \le t \le 1$

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^2 \overline{\gamma_1(t)}\,\gamma_1'(t)\, dt + \int_0^2 \overline{\gamma_2(t)}\,\gamma_2'(t)\,dt + \int_0^1 \overline{\gamma_3(t)}\,\gamma_3'(t)\,dt$$

$$= \int_0^2 t\, dt + \int_0^2 (2-it)(i)\,dt - \int_0^1 (2-2i)(1-t)(2+2i)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + i\left[2t - i\frac{t^2}{2}\right]_0^2 - (4+4)\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2 + i\,[4-2i] - 8\left[\tfrac{1}{2}\right] = 4i.$$

تمرين ٢:

هل يمكن استخدام مبرهنة الرواسب في حساب $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ حيث $\gamma(t) = e^{it}\,;\ -\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{7\pi}{6}$ ؟ علل اجابتك. ثم احسب هذا التكامل.

الحل:

* من الواضح أن طريق التكامل هو قوس من دائرة الواحدة وهذا يعني أنه ليس منحنياً مغلقاً. فلا يمكن استخدام مبرهنة الرواسب في حساب هذا التكامل.

* طريقة أخرى لحساب $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$:

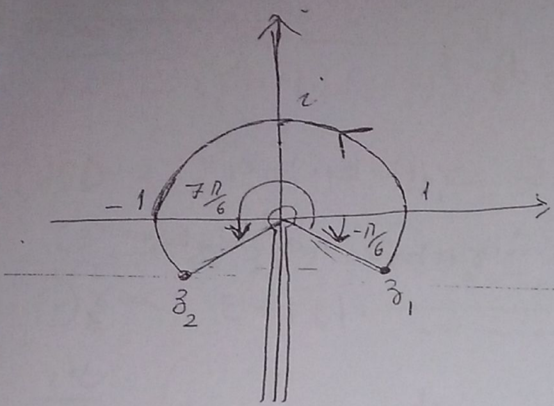
لأن γ منحنى أملس ومنه تماماً:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{\gamma(t)}\cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \frac{1}{e^{it}}\cdot i e^{it}\, dt = i\,[t]_{-\pi/6}^{7\pi/6} = i\left[\frac{7\pi}{6} - -\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= i\pi.$$

طريقة ثانية لحساب $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$:



إن التابع F المعرف بالمساواة:

$$F(z)=\ln|z|+i\theta$$

و θ هو قياس زاوية z المنتمي

للمجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ هو فرع تحليلي

للتابع اللغاريتمي على $D=\mathbb{C}\setminus oy^-$

وإن مشتقه على D هو $\frac{1}{z}$ أي F تابع أصلي

لـ $\frac{1}{z}$ على D ، المنطقة D و γ منحني واقع في D بدايته:

$z_1=e^{-i\pi/6}$ ونهايته $z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

حسب مبرهنة:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = F(z_2)-F(z_1)$$

$$=\left(\ln|z_2|+i\theta_2\right)-\left(\ln|z_1|+i\theta_1\right)$$

زاوية z_2 في المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ وهي $+\frac{7\pi}{6}$

زاوية z_1 في $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ وهي $-\frac{\pi}{6}$.

$$=\left(\ln 1+i\frac{7\pi}{6}\right)-\left(\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=i\pi.$$

تمرين ٢:
أحسب التكامل $\int_{\gamma_i} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz$ حيث:

① $\gamma_1(t) = (1+i) + e^{it}$ ، $0 \le t \le 2\pi$.

② $\gamma_2(t) = 2 + e^{-it}$ ، $0 \le t \le 4\pi$.

③ γ_3 هو $|z| = 3$.

الحل:

① إن المكامل تحليلي على $\mathbb{C}\setminus\{0,2\}$ فهو تحليلي على محيط وداخل γ_1 حيث أن $z=0$ و $z=2$ كلاً منهما يبعد عن $\underbrace{1+i}_{\text{مركز } \gamma_1}$ البعد مساوياً لـ $\sqrt{2}$ وهو > نصف قطر الدائرة γ_1.
حسب مبرهنة كوشي فإنه:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz = 0$$

② التابع المكامل تحليلي على محيط وداخل γ_2 إلا عند النقطة الشاذة الوحيدة $z=2$ الواقعة داخل γ_2. وحسب مبرهنة الرواسب فإن

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz = 2\pi i\, n(\gamma_2, 2)\, Res(2)$$

وبما أن γ_2 هو الدائرة التي مركزها 2 ونصف قطرها 1 ملفوفة مرتين بالاتجاه السالب فإن $n(\gamma_2, 2) = -2$. لأن:
$z=2$ قطب من المرتبة الثالثة للمكامل فهو صفر من المرتبة الثالثة للمقام ولا ينعدم بسطه ومنه:

$$Res(2) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 2}\left[(\cancel{z-2})^3 \frac{1}{z(\cancel{z-2})^3}\right]''$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[-\frac{1}{z^2}\right]' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\left[\frac{2z}{z^4}\right] = \frac{1}{8}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz = 2\pi i\,(-2)\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{i\pi}{2}$$

3) التابع المكامل تحليلي على محيط وداخل الدائرة $\gamma_3 : |z| = 3$ باستثناء عند النقطتين الشاذتين $z=0$ ، $z=2$ الواقعتين داخله. نحسب مرتبة الرواسب:

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz = 2\pi i\left(n(\gamma_3, 0)\,Res(0) + n(\gamma_3, 2)\,Res(2)\right)$$

إن γ_3 محوطة مرة واحدة بالاتجاه الموجب (اصطلاحاً) ومنه فإن $n(\gamma_3, 0) = n(\gamma_3, 2) = 1$.

$$Res(2) = \frac{1}{8}$$ محسوب في الطلب السابق

$$Res(0) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{1}{z(z-2)^3} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

حيث أن $z=0$ قطب بسيط للمكامل.

بالنتيجة:

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 0$$

ملاحظة: إذا لم يكن $Res(2)$ محسوباً سابقاً فالأفضل حساب التكامل الأخير:

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z(z-2)^3}\,dz = -2\pi i\,Res(\infty)$$

حيث أنه جميع نقاط المكامل شاذة معزولة بما فيها ∞ وجميع النقاط المحدودة تقع داخل γ_3. وبما أن درجة المقام - درجة البسط تساوي $4 >$ فإن $Res(\infty) = 0$ والتكامل معدوم.

ملاحظة: لو كان $f(z)=\frac{1}{z(z-2)^{90}}$ وطُلب حساب $Res(f,2)$ فإننا نستخدم الدستور:

$$Res(f,0)+Res(f,2)+Res(f,\infty)=0$$

لأن جميع نقاط f الشاذة بما فيها ∞ معزولة. وبما أن درجة المقام لـ f − درجة البسط >1 فإن $Res(\infty)=0$

$$Res(f,2)=-Res(f,0)=-\lim_{z\to 0} z\,\frac{1}{z(z-2)^{90}}$$

$$=-\frac{1}{(-2)^{90}}=-\frac{1}{4^{45}}=-\frac{1}{4(16)^{2}}$$

$= \cdots$

تمرين ٤:

احسب التكامل $\int_{|z|=1} e^{1/z}\sin\frac{1}{z}\,dz$.

الحل: للتكامل نقطة شاذة وحيدة واقعة داخل طريق المكاملة وهي 0:

$$\int_{|z|=1} e^{1/z}\sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,Res(0)=2\pi i$$

حيث أن:

$$e^{1/z}\sin\frac{1}{z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z}}+\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z^3}+\cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{Res(0)=1}$$

تمرين ٥:

احسب
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$$

الحل:

إن التكامل من الشكل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ حيث $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)^2}$

و f مستمر على IR لأن $x^2+2x+2\neq 0$ أياً كانت $x\in IR$

لأنه $\Delta = 4-8=-4<0$ وهذا يعني عدم وجود نقاط شاذة حقيقية لـ $f(z)$. كما أن عدد النقاط الشاذة لـ $f(z)$ في النصف العلوي من المستوي منتهٍ حيث أن العدد الكلي للنقاط الشاذة لـ f منتهٍ لأنه كسري. أخيراً إن $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z)=0$ في النصف العلوي

لأنه درجة المقام لـ f — درجة البسط لـ $f = 4 > 1$ وهذا يعني أيضاً تقارب التكامل.

نحسب بطريقة الرواسب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{\text{في النصف العلوي}} Res(f)$$

إن النقاط الشاذة لـ f هي حلول $z^2+2z+2=0$ وكان $\Delta=-4$

فإن $\delta_1=2i$ ، $\delta_2=-2i$ هما الجذران التربيعيان لـ Δ و.

$$z_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i \in \text{النصف العلوي}$$

$$z_2=\frac{-b+\delta_2}{2a}=\frac{-2-2i}{2}=-1-i \notin \text{النصف العلوي}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = 2\pi i\, Res(-1+i) = 2\pi i \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)^2\frac{1}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]'$$

(٨)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \frac{-2(z-z_2)}{(z-z_2)^4}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-2}{(z_1-z_2)^3}\right) = \frac{-4\pi i}{(2i)^3} = \frac{-4\pi i}{-8i}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

تمرين ٦:

احسب

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta$$

الحل: بما أن المكامل تابع زوجي فإن $I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta$.

والتكامل الأخير من الشكل $\int_{-\pi}^{+\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ (حيث طول المجال 2π) و $\cos 3\theta$ ، $\cos 2\theta$ يكتبان بدلالة $(\cos\theta, \sin\theta)$. كما أن $5-4\cos 2\theta \neq 0$ أياً كانت θ من $]-\pi,\pi[$. إذاً يمكن استخدام طريقة الرواسب لحساب التكامل الأخير. ولأجل ذلك نفرض $z = e^{i\theta}$ فيكون $dz = ie^{i\theta}d\theta$ ومنه $d\theta = \frac{dz}{iz}$ و z تمسح دائرة الواحدة مرة واحدة بالاتجاه الموجب عندما θ تمسح المجال $]-\pi,\pi[$.

$$\cos 3\theta = \frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} = \frac{(e^{i\theta})^3 + \frac{1}{(e^{i\theta})^3}}{2} = \frac{z^6+1}{2z^3}$$

$$5-4\cos 2\theta = 5-4\left(\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right) = 5-4\left(\frac{z^4+1}{2z^2}\right)$$

$$= \frac{5z^2-2z^4-2}{z^2}$$

$$\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos 2\theta} = \frac{z^6+1}{2z^3} \times \frac{z}{5z^2-2z^4-2} = \frac{z^6+1}{2z(-2z^4+5z^2-2)}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{2z(-2z^4+5z^2-2)}\, \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^2(-2z^4+5z^2-2)}\, dz$$

النقاط الشاذة للمكاملة

1 $z=0$ قطب مضاعف من المرتبة الثانية للمكامل ويقع داخل $|z|=1$

$$Res(0) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^6+1}{-2z^4+5z^2-2}\right]'$$

$$Res(0) = \lim_{z\to 0} \frac{6z^5(-2z^4+5z^2-2)-(-8z^3+10z)(z^6+1)}{(-2z^4+5z^2-2)^2}$$

$$Res(0) = 0$$

2 لنوجد جذور المعادلة $-2z^4+5z^2-2=0$

$$\Delta = 25-4(-2)(-2) = 25-16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

إما

$$z^2 = \frac{-5-3}{2(-2)} = 2$$

وجذور $z^2=2$ تقع على دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ ومركزها المبدأ فهي خارج $|z|=1$

أو

$$z^2 = \frac{-5+3}{2(-2)} = -\frac{2}{-4} = 1/2$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهما نقطتان شاذتان للمكامل وتقعان داخل $|z|=1$ وكلاهما قطب بسيط

9

(1.)

$$Res\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{z^6 + 1}{z^2(-2)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(z^2 - 2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} + 1}{\frac{1}{2}(-2)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)} = \frac{9}{12\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

لاحظ أن

$$\boxed{-2z^4 + 5z^6 - 2 = -2\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(z^2 - 2)}$$

$$Res\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to -\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{z^6 + 1}{-2z^2\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(z^2 - 2)}$$

$$Res\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{8} + 1}{-2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}$$

$$Res\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{-12\sqrt{2}} = \frac{3}{-4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4i}\left(2\pi i\left(\sum Res(f, z)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2\pi i\left(Res(0) + Res\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Res\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$

$$= 0$$

$\boxed{10}$