رياضيات / مستوى (٢) حل بعض التمارين تحليل (٤) لمستوى (٢) رياضيات

إعداد

تحليل (٤)

ليكن

د. محمد الشعافي

تمارين إضافية للمحاضرة الأخيرة

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x=0 \text{ أو } y=0) \\ x^2 \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

نعتبر أن $|\operatorname{arctg} u| < \frac{\pi}{2}$

أثبت أن $f_{yx}(0,0)=1$ , $f_{xy}(0,0)=-1$ , $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)$

الحل:

$$f_x(x,y) = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{yx^2+y^3}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$f_x(a,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_x(0,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,b)-f(0,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\operatorname{arctg}\frac{b}{h} - b^2\operatorname{arctg}\frac{h}{b}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(h\operatorname{arctg}\frac{b}{h} - \frac{b^2}{h}\operatorname{arctg}\frac{h}{b}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[0 - \frac{\operatorname{arctg}\frac{h}{b}}{\frac{h}{b}}(b)\right] = -b$$

حيث $\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1}$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0,\ y=0 \\ -y & x=0,\ y\neq 0 \\ 2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{yx^2+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(x,y) = -2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

بنفس الطريقة السابقة نجد

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0,\ y=0 \\ x & x\neq 0,\ y=0 \\ -2y\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0) = (f_x)_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

لتكن الدالة $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ [٣]

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & x \neq 0,\ y \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0,\ y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & x = 0,\ y \neq 0 \\ 0 & x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

أثبت ان $f$ قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$ في حين ان $f_x$ و $f_y$ ليسا متصلتين في هذه النقطة.

الحل: نفرض ان $f$ قابلة للاشتقاق

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h f_x(a,b) + k f_y(a,b) + \eta\sqrt{h^2+k^2}$$

حيث $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0 \times \text{عدد محدود} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2 \sin\frac{1}{k} - 0}{k} = 0$$

$$f(h,k) = h^2 \sin\frac{1}{h} + k^2 \sin\frac{1}{k}, \quad f(0,0) = 0$$

نعوض في القانون

$$h^2 \sin\frac{1}{h} + k^2 \sin\frac{1}{k} = \eta\sqrt{h^2+k^2}$$

[2]

$$\eta = \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} + k^2 \sin\frac{1}{k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

لنفرض أن: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \eta = 0$ لنأتي بتعريف النهاية

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \; 0<\|(h,k)\| < \delta \Rightarrow |\eta - 0| < \varepsilon$ :

$$|\eta - 0| = \left| \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} + k^2 \sin\frac{1}{k}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\Rightarrow |\eta - 0| < \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

إذن $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0, \; \|(h,k)\| < \delta \Rightarrow |\eta - 0| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$$

أو $\left|h^2 \sin\frac{1}{h} + k^2 \sin\frac{1}{k}\right| \le h^2\left|\sin\frac{1}{h}\right| + k^2\left|\sin\frac{1}{k}\right| \le h^2(1) + k^2(1)$ لأن $\sin$ مقيدة

$\le h^2 + k^2$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق في $(0,0)$

ثالثاً: البرهان أن $f_x$ و $f_y$ غير مستمرين في $(0,0)$

$$\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = -\cos\infty\right]$$ إذا كانت $x \neq 0, y$

النهاية غير موجودة إذاً $f_x$ ليست مستمرة في $(0,0)$

بنفس الطريقة $f_y$ غير مستمر عند $(0,0)$

---

$\boxed{٣}$ ادرس استمرار الدالة التالية على $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & (x \neq 0 \text{ عندما}) \\ y & (x = 0 \text{ عندما}) \end{cases}$$

أولاً: إذا كانت $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$ فإن

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{\sin a\cdot b}{a} = f(a,b)$$

بحيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ونأخذ $a=0$

(c) إذا كانت

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,b)} y\,\frac{\sin xy}{xy} = b$$

$$f(0,b) = b$$

إذن

ومنه $(x,y) \to (0,b)$ من خارج $\mathbb{R}^2$ ماعدا $oy$

نأخذ في الاعتبار محور $oy$ أي $(x=0)$ فإن

$$\lim_{(0,y)\to(0,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b} y = b = f(0,b)$$

٤ حدد نقاط القيم القصوى النسبية والقصوى النسبية للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ

$f(x,y) = 2\sin(x^2+y^2)+1$

$f_x(x,y) = 4x\cos(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow x=0$
$f_y(x,y) = 4y\cos(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow y=0$ $\Rightarrow (0,0)$ حرجة

$x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

ثم في $(0,0)$

$f_{xx} = -8x\sin(x^2+y^2)+4\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 4 > 0$

$f_{yy} = -8y\sin(x^2+y^2)+4\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 4$

$f_{xy} = 0 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$

قيمة صغرى نسبية

النقاط الحرجة $\cos(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+\pi k$

k زوجي ⇐ لأن $-1 \leq \sin(x^2+y^2) \leq 1 \Leftarrow$

$-1 \leq 2\sin(x^2+y^2)+1 \leq 3$

k فردي ⇐ $f(x,y) = -1$ عظمى

k زوجي ⇐ $f(x,y) = 3$ صغرى

$\boxed{٣}$

النقاط الحرجة هي النقاط التي تحقق

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\pi k \\ x^2+y^2=\pi k \end{array}\right\}$ حيث $k \geq 0$

$f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$

$f_x(x,y) = -2x\sin(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_y(x,y) = -2y\sin(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ,

$(0,0)$

$f_{xx}(x,y) = -2\sin(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 0$

$f_{xy}(x,y) = -4xy\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$

لكن ، ممكن عظمى لأن $f(0,0) = 1$

$\Delta = 0$ $\cancel{f(x,y)}$

$-1 \leq \cos(x^2+y^2) \leq 1 = f(0,0)$ لأن

$f(x,y) \leq f(0,0) \Rightarrow (0,0)$ عظمى مطلقة

اكتشف عن ، ارجع الى

من أجل $(x,y)$ التي تحقق $x^2+y^2=\pi k$ حيث $0 < k$ ،

① ~~k فردي~~

① $k$ فردي

② $k$ زوجي

$f(x,y) = \cos(\pi k) = -1$ صغرى مطلقة

$f(x,y) = \cos(2\pi k) = +1$ عظمى مطلقة

---

٦

انتهى