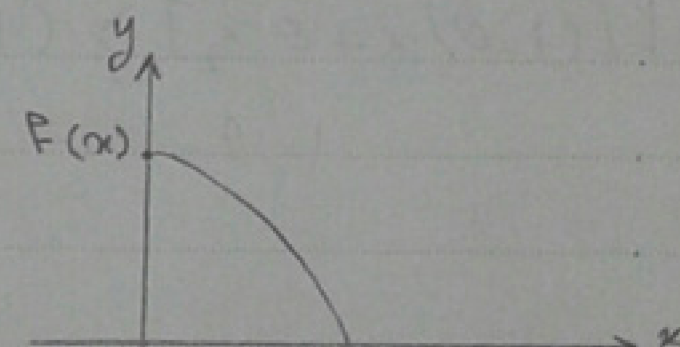
المحاضرة العاشرة :

الإثنين 2015/4/20

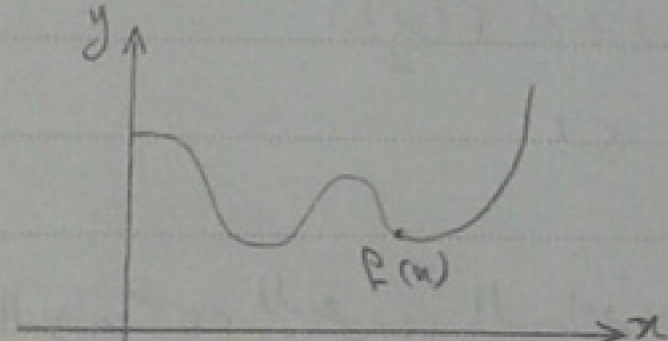
تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحل المثالي :

1. حد أعظمي أو حد أصغري غير مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف فقط وكان هذا التابع محدب (مقعر) فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع داخل المنطقة النافذة (حيث تنعدم المشتقات) أو عند نقطة حدية.



حل داخلي لمسألة غير مقيدة
(إيجاد القيمة الصغرى)



حل داخلي لمسألة غير مقيدة
(إيجاد القيمة العظمى)

2. إيجاد القيمة العظمى - التابع مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة كل من التابع ومجموعة القيود فإذا كان تابع الهدف مقعر ومجموعة القيود تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسألة وبالتالي فإن أي نقطة مستقرة يجب أن تكون حلاً أعظمياً شمولياً.

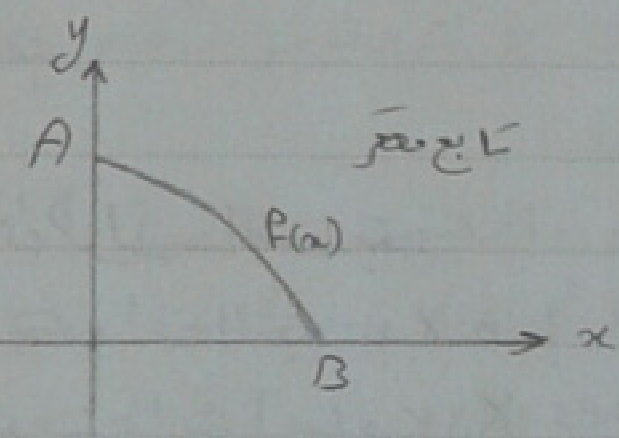
3. إيجاد القيمة الصغرى - التابع مقيد :

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود وكان تابع الهدف محدباً والقيود تشكل منطقة محدبة فإن أي نقطة مستقرة تكون حلاً

أصغراً شمولياً.

4. إيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر أو محدب:

إذا كنا نقوم بإيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر أو محدب فإن الحل الأمثل سيوجد فقط عند إحدى النقاط الحدية لمجموعة القيود



مثلاً:

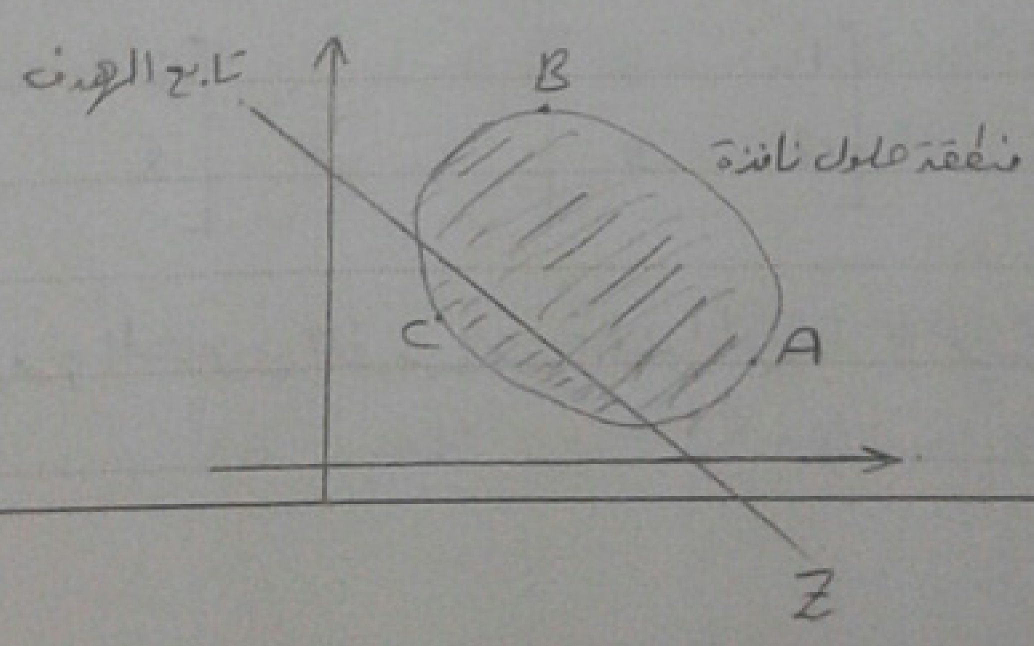
لإيجاد القيمة الأصغرية لهذا التابع نحتاج لاختبار النقطتين A و B

تكمن المشكلة هنا بأنه في معظم مسائل البرمجة اللاخطية ولا سيما الصيغ الواقعية قد تكون مجموعة نقاط الحل كبيرة جداً.

5. التابع الخطي (محدب ومقعر بنفس الوقت):

يشكل التابع الخطي فئة من مسائل الأمثلة وحسب تعريف التابع المحدب والتابع المقعر فإن التابع الخطي محدب ومقعر معاً لذا إذا كان فضاء الحل محدباً يمكن إيجاد الحل عند الحدود.

6. مناطق غير محدبة:



إذا شكلت مجموعة القيود فضاء حلول غير محدد عندها علين لأي إجراء خوارزمي بعقيدي الخواص المحلية لمسألة البرمجة اللاخطية أن ينتج نقطة مستقرة وقد لا تكون أعظمية شمولية ولا أصغرية شمولية وهذه الملاحظة صحيحة حتى لو كان تابع الهدف ذو طبيعة خطية.

بفرض أنّ النقاط A, B, C هي حدود مثلى محلية فإنّه لإيجاد القيمة العظمى نجد أن B نقطة شمولية.

المصفوفات الصغرى الأساسية:

إذا كانت المصفوفة Q ذات البعد $n \times n$ فإنّ المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة K هي مصفوفة ذات أبعاد $K \times K$ نحصل عليها بإهمال $(n-K)$ سطر والأعمدة المقابلة لها من المصفوفة Q

مثال:

لتكن المصفوفة Q بالشكل:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

إنّ المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 1 هي أساساً العناصر القطرية.

أمّا المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 2 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 3 هي Q نفسها.

تعريف:

ندعو معين المصفوفة الصغرى الأساسية بالمعين الأساسي حيث أنه لكل مصفوفة مربعة من القياس $(n \times n)$ $2^n - 1$ معيناً أساسياً.

المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية:

نحصل عليها من المرتبة K للمصفوفة $n \times m$ بإهمال الأسطر $(n-K)$ الأخيرة والأعمدة المقابلة لها.

في المثال السابق تكون المصفوفة الأساسية الرئيسية من المرتبة 1 هي (1) حيث أهملنا السطرين الأخيرين والعمودين المقابلين

أما المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 2 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 3 هي Q نفسها.

- يبلغ عدد المصفوفات الصغرى الأساسية الرئيسية في المصفوفة $n \times n$ n مصفوفة.

ملاحظة: توجد بعض الاختبارات لتعيين المصفوفة المعرفة الموجبة أو المعرفة السالبة أو شبه المعرفة الموجبة أو شبه المعرفة السالبة وتطبق هذه الاختبارات على المصفوفات المتناظرة فقط.

أما إذا كانت Q غير متناظرة فإننا نطبق الاختبار على المصفوفة $\dfrac{Q+Q'}{2}$ حيث Q' هي منقول المصفوفة Q.

1. اختبار المصفوفة المعرّفة الموجبة:

1- يجب أن تكون كل العناصر القطرية موجبة تماماً.

2- يجب أن تكون كل المعينات الأساسية الرئيسية موجبة تماماً.

اختبار المصفوفة المعرفة شبه الموجبة:

1- يجب أن تكون كل العناصر القطرية غير سالبة.

2- يجب أن تكون كل المحددات الأساسية الرئيسية غير سالبة.

ملاحظة 1:

لإثبات أن مصفوفة Q معرفة سالبة أو شبه سالبة يكفي أن نثبت أن Q- معرفة موجبة أو شبه موجبة.

ملاحظة 2:

يكفي لمعرفة أن مصفوفة ما غير معرفة وجود عنصرين قطريين على الأقل متعاكسين بالإشارة.

المصفوفة الهيسية /مصفوفة هيسيان/:

ليكن لدينا التابع f بالشكل: $f(x_1, x_2, --, x_n)$

نعرف تدرج التابع f بالشكل:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, --, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

فتكون المصفوفة الهيسية للتابع f بالشكل:

$$H_{f(x_1, --, x_n)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

وهي مصفوفة مربعة متناظرة ذات الأبعاد $n \times n$

من خلال هذه المصفوفة سنحدد كون التابع مقعر أو محدب.

اختبار تحدب تابع ما:

يكون التابع f تابعاً محدباً إذا كانت المصفوفة الهسية له معرفة موجبة أو شبه موجبة من أجل كل القيم $x_1, \dots, x_n$.

اختبار تقعر تابع ما:

يكون التابع f تابعاً مقعراً إذا كانت المصفوفة الهسية له معرفة سالبة أو شبه سالبة من أجل كل القيم $x_1, \dots, x_n$.

انتهت المحاضرة..