ملاحظات:

1) اذا كان $I \subset K[x_1, \dots x_n]$ و كان $1 \in I$ فان $I = K[x_1, \dots x_n]$

لأنه $\forall f \in K[x_1, \dots x_n] : 1 . f \in I$

ومنه $I = K[x_1, \dots x_n]$

2) الفضاء الأفيني $\mathbb{A}^n_K \; (K^n)$ هو متنوعة أفينية $K^n = V(0)$

3) $V(1) = \phi$ هي متنوعة أفينية.

4) المتنوعة الأفينية $\{(a_1, \dots a_n)\}$ هي $V(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$.

حلقة كثيرات الحدود هي حلقة نوثرية

R نوثرية ← $R[x]$ نوثرية

العمليات على المثاليات: 1: ضرب المثاليات:

تعريف:

اذا كانت $I, J \subset K[x_1, \dots x_n]$ مثاليين عندئذٍ نعرف الجداء $I . J$ على النحو التالي:

$$I . J = \{ f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_r g_r \; ; \; f_i \in I \, , \, g_i \in J \}$$

وحيث $r \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان:

* $I . J$ مثالي لأن $0 \in I . J$ وضوحاً ($0 \in I , 0 \in J$).

أي $h_1, h_2 \in I . J$

$h_1 = f_1 . g_1 + \dots + f_r . g_r \; ; \; f_i \in I \; , g_i \in J$

$h_2 = f'_1 . g'_1 + \dots + f'_s . g'_s \; ; \; f_j \in I \; , g_j \in J$

$p \in K_1[x_1, \dots x_n] \; , \; h_1 \in I . J$

$p . h_1 = p(f_1 g_1) + p(f_2 g_2) + \dots + p(f_r g_r)$

$= (p f_1) g_1 + (p f_2) g_2 + \dots + (p f_r) g_r \in I . J$

برهنة:

اذا كان $I=\langle f_1,\dots f_r\rangle$ ، $J=\langle g_1,\dots g_s\rangle$ عندئذٍ $I.J$ يتولد بـ مجموعة جميع الجداءات لمولدات I و J أي:

$$I.J=\{f_i.g_j : 1\le i\le r ,\ 1\le j\le s\}.$$

الإثبات:

* من الواضح أن المثالي المولد بـ $f_i g_j$ محتوى في $I.J$ (حسب التعريف) أي أن
$\langle f_i g_j\rangle\subset I.J$

* إن أي كثيرة حدود في $I.J$ هي مجموع كثيرات حدود من الشكل $f.g$ ($f\in I$, $g\in J$)
لكن يمكن كتابة $f.g$ بالشكل: $f=a_1f_1+a_2f_2+\dots a_rf_r$
$g=b_1g_1+b_2g_2+\dots+b_sg_s$
حيث $a_1,\dots a_r, b_1,\dots b_s\in K[x_1,\dots x_n]$
وإذن $f.g$ هي من الشكل: $\sum c_{ij}f_ig_j$
حيث $1\le i\le r$ ، $1\le j\le s$ و $c_{ij}\in K[\underline{x}]$

ملاحظة: $K[\underline{x}]=K[x_1,\dots x_n]$

ومنه: $f.g\in\langle f_ig_j\rangle$ ومنه $I.J\subset\langle f_ig_j\rangle$

ومنه

$$I.J=\langle f_ig_j\rangle.$$

مبرهنة:

ليكن I, J مثاليين في $K[\underline{x}]$ عندئذٍ:

$$V(I.J)=V(I)\cup V(J)$$

الإثبات:

* ليكن $x \in V(I.J) \Leftarrow$

$g(x).h(x)=0$ لكل: $g \in I$ ولكل $h \in J$

فإذا كان $g(x)=0$ لكل $g \in I$ فإن $x \in V(I)$

وإذا وجد $g \in I$ بحيث $g(x) \neq 0$ فإن $h(x)=0$ لكل $h \in J$

ومنه فإن

ومنه $x \in V(I) \cup V(J)$ $V(I.J) \subset V(I) \cup V(J)$

* من جهة ثانية:

ليكن $x \in V(I) \cup V(J)$:

عندئذ: $g(x)=0$ لكل $g \in I$

$h(x)=0$ لكل $h \in J$

أي أن $f=g.h=0$ لكل $g \in I$ ولكل $h \in J$ وهذا معناه

أن $x \in V(I.J)$ ومنه

$V(I) \cup V(J) \subseteq V(I.J)$

وهو المطلوب.

2: تقاطع المثاليات:

تعريف:

ليكن I, J مثاليين في $K[x_1,\dots x_n]$ يعرف التقاطع $I \cap J$ بالشكل:

$I \cap J = \{f \in K[x_1,\dots x_n] : f \in I \wedge f \in J\}$

مبرهنة: إذا كان I, J مثاليين في $K[x_1,\dots x_n]$ فإن $I \cap J$ مثالي في $K[x_1,\dots x_n]$

البرهان: * $0 \in I \cap J$ وضوحاً.

* إذا كان $f, g \in I \cap J$ ومنه $f+g \in I$ و $f+g \in J$ (لأنه كل منها مثالي).

ومنه

$f+g \in I \cap J$.

* ليكن $f \in I \cap J$ وليكن $h \in K[x_1, \dots x_n]$ فإن $h.f \in I$ و $h.f \in J$

ومنه $h.f \in I \cap J$

ومنه

$I \cap J$ مثالي في $K[x_1, \dots x_n]$.

ملاحظة: $I.J \subset I \cap J$.

انتهت المحاضرة الحادية عشر.

حاول برهن أن $I+J$ مثالي للمحاضرة القادمة.